Teoria dei Fasci e Coomologia Applicata alla Cartografia

Introduzione

La teoria dei fasci costituisce uno degli strumenti più potenti e versatili della matematica moderna, trovando applicazioni in svariati ambiti che spaziano dalla geometria algebrica alla topologia differenziale, dalla teoria delle equazioni differenziali parziali fino alla teoria delle categorie. Nel contesto della cartografia matematica, l'approccio funtoriale e categoriale offerto dalla teoria dei fasci permette di formalizzare in modo rigoroso e unificato concetti fondamentali quali le carte locali, gli incollamenti tra coordinate, le ostruzioni a estensioni globali e le singolarità nelle trasformazioni tra sistemi di riferimento.

Il presente trattato si propone di sviluppare un'analisi approfondita e tecnicamente rigorosa delle applicazioni della teoria dei fasci e della coomologia alla cartografia, adottando un punto di vista categoriale e topologico-algebrico. Attraverso la formalizzazione di fasci di funzioni differenziabili su atlanti, l'utilizzo della coomologia di Čech per lo studio di ostruzioni globali, l'analisi di fasci con proprietà speciali di aciclicità, e l'applicazione di strumenti avanzati quali i fasci perversi, i D-moduli e la teoria dei topos, si intende fornire un quadro teorico completo che permetta di affrontare con rigore matematico le problematiche più complesse della rappresentazione cartografica.

Il filo conduttore che percorre l'intero trattato è la tesi secondo cui la cartografia matematica, lungi dall'essere una disciplina puramente tecnica orientata al disegno di proiezioni, costituisce un campo di applicazione naturale per la geometria algebrica e la topologia algebrica contemporanee. Ogni carta geografica è, in ultima analisi, un dato locale; ogni atlante è un ricoprimento; ogni incompatibilità tra sistemi di riferimento è un'ostruzione coomologica. Riconoscere questa struttura non è un mero esercizio di formalizzazione, ma permette di importare nella cartografia un intero arsenale di tecniche — risoluzioni acicliche, dualità di Verdier, teoria dell'omotopia dei topos — sviluppate originariamente per problemi distanti, quali la geometria algebrica su schemi o la teoria quantistica dei campi topologica.
Il trattato è organizzato secondo un principio di crescente generalità e astrazione. Si parte, nel Capitolo 1, dalla nozione più elementare di fascio, applicata al caso familiare delle funzioni differenziabili su un atlante; si prosegue, nei Capitoli 2 e 3, con gli strumenti coomologici classici (Čech, fasci fini e soft, teorema di de Rham); si affrontano quindi, nei Capitoli 4 e 5, le tecniche più sofisticate della teoria dei fasci perversi, dei D-moduli e dei topos di Grothendieck, necessarie per trattare rigorosamente le singolarità che inevitabilmente compaiono in ogni proiezione cartografica globale; il Capitolo 6 introduce la dualità di Verdier come cornice unificante; il Capitolo 7 collega questo impianto classico alla topological data analysis contemporanea attraverso la coomologia dei fasci persistenti; il Capitolo 8, infine, sintetizza il quadro e ne esplora le frontiere applicative, dal GIS quantistico al machine learning geometrico.

1. Fasci di Funzioni Differenziabili su Atlanti

1.1 Richiami di Teoria dei Fasci

Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** F di gruppi abeliani (o anelli, o moduli) su X consiste in una assegnazione che a ogni aperto $U \subseteq X$ associa un gruppo abeliano F(U), insieme a morfismi di restrizione $\varrho_{U,V}: F(U) \to F(V)$ per ogni inclusione $V \subseteq U$ di aperti, tali che:

1. $F(\varnothing)$ è il gruppo banale
2. $\varrho_{U,U} = \mathrm{id}_{F(U)}$ per ogni aperto U
3. $\varrho_{U,W} = \varrho_{V,W} \circ \varrho_{U,V}$ per ogni catena $W \subseteq V \subseteq U$ di aperti

Un prefascio F si dice **fascio** se soddisfa le seguenti condizioni aggiuntive:

Località: Se $\{U_i\}_{i \in I}$ *è un ricoprimento aperto di U e* $s \in F(U)$ *è tale che* $\varrho_{U,U_i}(s) = 0$ per ogni $i \in I$, allora $s = 0$.

Incollamento: Se $\{U_i\}_{i \in I}$ *è un ricoprimento aperto di U e* $\{s_i \in F(U_i)\}_{i \in I}$ è una famiglia di sezioni compatibili, nel senso che $\varrho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \varrho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$ per ogni coppia $i,j \in I$, allora esiste un'unica sezione $s \in F(U)$ tale che $\varrho_{U,U_i}(s) = s_i$ per ogni $i \in I$.

La categoria dei fasci su X, denotata Sh(X), è una sottocategoria piena della categoria dei prefasci PSh(X). Il funtore di fascificazione $a: \mathrm{PSh}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ è l'aggiungo sinistro del funtore di inclusione, e permette di associare a ogni prefascio F il fascio associato aF in modo universale.

È utile osservare che la condizione di fascio può essere riformulata in termini puramente categoriali come condizione di equalizzatore: F è un fascio se e solo se, per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U, il diagramma $F(U) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$ è un equalizzatore, dove le due frecce parallele sono indotte dalle restrizioni a $U_i \cap U_j$ viste rispettivamente come sottoinsieme di U_i e di U_j. Questa riformulazione, apparentemente astratta, è ciò che permette di definire i fasci non solo su spazi topologici ma su qualunque sito di Grothendieck, generalizzazione che sarà cruciale nel Capitolo 5 quando la nozione di "ricoprimento" verrà essa stessa assiomatizzata indipendentemente da una topologia insiemistica sottostante.

1.2 Atlanti e Strutture Differenziabili

Sia M una varietà topologica di dimensione n, ossia uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Un **atlante differenziabile** di classe C^∞ su M è una collezione $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ dove:

- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento aperto di M
- Ogni $\varphi_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo su un aperto V_α di $\mathbb{R}^n$
- Per ogni $\alpha,\beta \in A$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, la funzione di transizione $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un diffeomorfismo C^∞

Le coppie $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sono chiamate **carte locali** o **carte coordinate**, e le funzioni di transizione codificano la compatibilità delle diverse rappresentazioni locali della varietà.

Nella pratica cartografica gli atlanti raramente sono minimali: la Terra viene tipicamente ricoperta da fusi UTM, da calotte polari stereografiche e da eventuali carte locali ad alta risoluzione per aree di interesse specifico, generando ricoprimenti ridondanti con intersezioni multiple e talvolta non connesse (si pensi all'intersezione tra un fuso UTM e la sua immagine antipodale rispetto all'antimeridiano). Un atlante A si dice **subordinato** a un atlante B se ogni carta di A è contenuta nel dominio di una carta di B con funzione di transizione indotta; due atlanti sono **equivalenti** se ammettono un raffinamento comune, e la

classe di equivalenza determina univocamente la struttura differenziabile su M. Questa nozione di equivalenza anticipa, a livello elementare, il procedimento di raffinamento dei ricoprimenti che sarà formalizzato coomologicamente nella Sezione 2.2.

1.3 Il Fascio delle Funzioni Differenziabili

Sia M una varietà differenziabile con atlante A = {(U_α, φ_α)}_{α∈A}. Definiamo il fascio C^∞_M delle funzioni differenziabili su M nel modo seguente. Per ogni aperto U ⊆ M, poniamo:

C^∞_M(U) = {f: U → ℝ | f è di classe C^∞}

Una funzione f: U → ℝ è detta differenziabile se per ogni punto p ∈ U esiste una carta (U_α, φ_α) con p ∈ U_α ⊆ U tale che la rappresentazione locale f ∘ φ_α^{-1}: φ_α(U_α ∩ U) → ℝ è C^∞ nel senso del calcolo multivariabile in ℝ^n.

I morfismi di restrizione ϱ_{U,V}: C^∞_M(U) → C^∞_M(V) per V ⊆ U sono dati dalla restrizione ordinaria di funzioni. È facile verificare che C^∞_M soddisfa le proprietà di località e incollamento, e quindi costituisce effettivamente un fascio di ℝ-algebre su M.

Va sottolineato che C^∞_M non è l'unico fascio strutturale rilevante: accanto ad esso si considerano usualmente il fascio C^ω_M delle funzioni analitiche reali (quando M ammette una struttura analitica, come nel caso della sfera S^2 con le proiezioni stereografiche, che sono funzioni razionali e quindi analitiche) e il fascio C^k_M delle funzioni k volte differenziabili con continuità, per k finito. La scelta della categoria di regolarità non è indifferente ai fini cartografici: mentre C^∞ è la scelta naturale per la geometria differenziale astratta, molte trasformazioni cartografiche classiche (ad esempio le proiezioni conformi ottenute per continuazione analitica) sono in realtà C^ω, e questa regolarità superiore garantisce proprietà di rigidità — quali il principio di identità, per cui due funzioni analitiche che coincidono su un aperto coincidono ovunque siano entrambe definite — assenti nel caso puramente liscio.

1.4 Formalizzazione degli Incollamenti

La condizione di fascio formalizza rigorosamente la possibilità di incollare dati locali in modo coerente. Nel contesto cartografico, questo è di importanza fondamentale: date diverse carte locali che rappresentano porzioni sovrapposte della superficie terrestre, la struttura di fascio garantisce che le funzioni (ad esempio altitudini, temperature, densità di popolazione) definite localmente su ciascuna carta possano essere estese in modo univoco a una funzione globale, purché siano compatibili sulle intersezioni.

Più precisamente, sia {(U_α, φ_α)}_{α∈A} un atlante cartografico sulla superficie M (che possiamo modellare come una varietà bidimensionale). Supponiamo di avere misurazioni di una grandezza fisica rappresentate da funzioni f_α: U_α → ℝ, dove ciascuna f_α è espressa nel sistema di coordinate locale φ_α. La compatibilità delle misurazioni richiede che per ogni coppia α,β con U_α ∩ U_β ≠ ∅, si abbia:

f_α | {*U_a* ∩ *U_β*} = *f_β* | {U_α ∩ U_β}

Questa è esattamente la condizione di compatibilità richiesta dalla proprietà di incollamento dei fasci. La struttura di fascio di C^∞*M garantisce allora l'esistenza e l'unicità di una funzione globale f: M* → ℝ *tale che f* | {U_α} = f_α per ogni α ∈ A.

Un caso di particolare rilevanza applicativa è quello in cui le funzioni f_α non sono misurazioni dirette ma sono esse stesse il risultato di una trasformazione di coordinate applicata a un dato fisico invariante. Sia ad

esempio $h: M \to \mathbb{R}$ il campo scalare dell'altitudine sul livello del mare, ben definito indipendentemente dalla carta scelta; la sua rappresentazione nella carta α è semplicemente $h_\alpha = h \circ \varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \to \mathbb{R}$. La compatibilità di incollamento è allora automaticamente soddisfatta perché tutte le h_α derivano da un'unica funzione globale h. Il problema cartografico realistico è tuttavia l'inverso: si dispone di misurazioni h_α indipendenti, effettuate con strumenti e in epoche diverse su ciascuna carta locale, e ci si chiede se esse siano compatibili sulle sovrapposizioni entro la precisione strumentale. Quando la compatibilità fallisce strettamente ma è verificata a meno di un errore ε, si parla di **incollamento approssimato**, e la teoria dei fasci può essere estesa con strutture di tipo fascio-ε o, più modernamente, mediante la teoria della persistenza discussa nel Capitolo 7.

1.5 Spazi Etali e Germi di Funzioni

Un modo alternativo e geometrico di concepire i fasci è attraverso la nozione di **spazio etale**. Dato un fascio F su X, lo spazio etale $\mathrm{Et}(F)$ è definito come l'unione disgiunta:

$$\mathrm{Et}(F) = \bigsqcup_{x \in X} F_x$$

dove $F_x = \varinjlim_{U \ni x} F(U)$ è il **germe** del fascio F nel punto x, ossia il limite diretto (colimite) sui sistemi di aperti contenenti x. Lo spazio $\mathrm{Et}(F)$ viene dotato di una topologia naturale che lo rende uno spazio localmente omeomorfo a X, e la proiezione $\pi: \mathrm{Et}(F) \to X$ è un omeomorfismo locale.

Nel caso del fascio C^∞_M, il germe $[f]_p$ in un punto $p \in M$ rappresenta la classe di equivalenza di funzioni differenziabili definite in intorni di p, dove due funzioni sono equivalenti se coincidono in qualche intorno di p. Lo spazio etale $\mathrm{Et}(C^\infty_M)$ fornisce quindi una rappresentazione geometrica dello "spazio delle funzioni differenziabili locali", e le sezioni globali $\Gamma(M, C^\infty_M) = C^\infty_M(M)$ corrispondono alle sezioni continue $\sigma: M \to \mathrm{Et}(C^\infty_M)$ della proiezione π.

La costruzione dello spazio etale ammette una lettura cartografica suggestiva: $\mathrm{Et}(C^\infty_M)$ può essere pensato come lo spazio di tutte le possibili "letture locali infinitesime" di grandezze scalari sulla superficie terrestre, un punto di $\mathrm{Et}(C^\infty_M)$ sopra $p \in M$ essendo precisamente un germe di misurazione in un intorno arbitrariamente piccolo di p, senza impegno riguardo al comportamento della misurazione lontano da p. Questa prospettiva chiarisce perché la coomologia dei fasci, e non semplicemente la teoria degli insiemi di funzioni, sia lo strumento corretto per il problema dell'estensione globale: il passaggio da un germe (dato locale, sempre disponibile) a una sezione globale (dato su tutto M) è precisamente il contenuto non banale codificato dai gruppi di coomologia $H^i(M, F)$ per $i > 0$, che misurano l'ostruzione a tale passaggio.

1.6 Fasci di Forme Differenziali

Oltre al fascio delle funzioni differenziabili, sulla varietà M possiamo definire i fasci Ω^p_M delle p-forme differenziali. Per ogni aperto $U \subseteq M$, poniamo:

$$\Omega^p_M(U) = \{\omega \in \Gamma(U, \textstyle\bigwedge^p T^*M) \mid \omega \text{ è } C^\infty\}$$

dove T^*M *denota il fibrato cotangente di* M *e* $\bigwedge^p TM$ la sua p-esima potenza esterna. Le forme differenziali svolgono un ruolo cruciale nella formulazione geometrica delle equazioni della fisica matematica e nella teoria dell'integrazione su varietà.

Il differenziale esterno $d: \Omega^p_M \to \Omega^{p+1}_M$ definisce un morfismo di fasci, e la sequenza:

$0 \to \mathbb{R}_M \to \Omega^0_M \to^d \Omega^1_M \to^d \Omega^2_M \to^d \dots \to^d \Omega^n_M \to 0$

dove $\mathbb{R}_M$ denota il fascio costante delle funzioni localmente costanti a valori reali, è il **complesso di de Rham**. L'esattezza di questa sequenza in grado $p > 0$ è assicurata dal **lemma di Poincaré**, che afferma che su aperti contrattili ogni forma chiusa è esatta.

Nel contesto cartografico, le 2-forme su una superficie M rivestono un'importanza particolare poiché codificano gli **elementi d'area**: data una metrica riemanniana g su M indotta ad esempio dalla struttura di superficie di riferimento (sfera, ellissoide di rotazione), la forma di volume $\mathrm{dvol}_g \in \Omega^2_M(M)$ è la sezione globale canonica che permette di calcolare aree su M indipendentemente dalla carta scelta. Il problema classico secondo cui "nessuna carta piana preserva sia le aree sia gli angoli" (si veda il Capitolo 3 dell'opera companion *The Impossibility Theorems of Cartography*) può essere riformulato precisamente nel linguaggio dei fasci di forme: una proiezione $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{R}^2$ è equiareale se e solo se $\varphi_\alpha^* (dx \wedge dy) = \mathrm{dvol}_g$ su U_α, ed è conforme se e solo se preserva la struttura complessa indotta da g; la simultanea validità di entrambe le condizioni forza φ_α ad essere un'isometria locale, impossibile per superfici a curvatura gaussiana non nulla per il Theorema Egregium di Gauss.

1.7 Esempio Cartografico: Il Fascio delle Coordinate Proiettive

Per rendere concreto il formalismo sviluppato in questo capitolo, si consideri l'atlante standard della sfera S^2 costituito dalle due proiezioni stereografiche $\varphi_N: S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ dal polo nord e $\varphi_S: S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$ dal polo sud. La funzione di transizione sull'intersezione (l'intera sfera meno i due poli) è data da $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(z) = z / |z|^2$ nella rappresentazione complessa $z = x + iy$, un'inversione conforme. Il fascio $C^\infty_{S^2}$ è allora completamente determinato dalla compatibilità delle funzioni lisce rispetto a questa singola funzione di transizione; una funzione $f_N: \varphi_N(S^2\setminus\{N\}) \to \mathbb{R}$ e una funzione $f_S: \varphi_S(S^2\setminus\{S\}) \to \mathbb{R}$ si incollano a una funzione globale se e solo se $f_N(z) = f_S(z/|z|^2)$ per ogni $z \neq 0$. Questo esempio, benché elementare, è il prototipo di tutti i calcoli di ostruzione che verranno sviluppati nella Sezione 2.5 a proposito del problema storico della longitudine, dove il ruolo dei due poli è giocato dai meridiani di riferimento discordanti tra osservatori.

2. Coomologia di Čech per Coprimenti Aperti

2.1 Definizione della Coomologia di Čech

La coomologia di Čech fornisce un metodo combinatorio per calcolare i gruppi di coomologia di un fascio su uno spazio topologico, basato sulla scelta di un ricoprimento aperto. Sia F un fascio di gruppi abeliani su X e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X indicizzato da un insieme I.

Per ogni multi-indice $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_p)$ di lunghezza $p+1$, definiamo l'intersezione:

$$U_\sigma = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

Il gruppo delle **p-cocatene di Čech** di $\mathcal{U}$ a valori in F è definito come:

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, F) = \prod_{\sigma \in I^{p+1}} F(U_\sigma)$$

dove il prodotto è esteso su tutti i multi-indici ordinati di lunghezza $p+1$. Un elemento $\alpha \in \check{C}^p(\mathcal{U}, F)$ è quindi una collezione $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in I^{p+1}}$ dove $\alpha_\sigma \in F(U_\sigma)$ per ogni σ.

Il **cobordo di Čech** δ: Č^p(U, F) → Č^{p+1}(U, F) è definito dalla formula:

(δα){*i_0,...,i*{p+1}} = Σ_{j=0}^{p+1} (-1)^j ϱ_{U_{i_0,...,i_{p+1}}, U_{i_0,...,î_j,...,i_{p+1}}}(α_{i_0,...,î_j,...,i_{p+1}})

dove il simbolo î_j indica che l'indice i_j è omesso dalla sequenza, e ϱ denota il morfismo di restrizione del fascio F. Si verifica facilmente che δ ∘ δ = 0, per cui la sequenza:

0 → Č^0(U, F) →^δ Č^1(U, F) →^δ Č^2(U, F) →^δ ...

costituisce un complesso di cocatene, chiamato **complesso di Čech** di U a valori in F.

I **gruppi di coomologia di Čech** sono definiti come:

Ȟ^p(U, F) = ker(δ: Č^p(U, F) → Č^{p+1}(U, F)) / im(δ: Č^{p-1}(U, F) → Č^p(U, F))

ossia come la coomologia del complesso di Čech. Un elemento di Ȟ^p(U, F) è rappresentato da una p-cocatena α tale che δα = 0 (un **p-cociclo**), e due cocicli α, α' rappresentano la stessa classe di coomologia se differiscono per un cobordo, ossia se α - α' = δβ per qualche β ∈ Č^{p-1}(U, F).

Conviene esplicitare il caso i=0: Z^0(U, F) = ker(δ^0: C^0 → C^1) coincide esattamente con le famiglie di sezioni compatibili {s_i} nel senso della condizione di incollamento discussa nella Sezione 1.1, e la proprietà di fascio garantisce che H^0(U, F) = Ȟ^0(U, F) = F(U) per ogni ricoprimento U, indipendentemente dalla sua finezza. È in grado 1 e superiore che la coomologia di Čech acquisisce contenuto informativo genuino: H^1(U, F) ≠ 0 segnala l'esistenza di famiglie di sezioni localmente compatibili a coppie (cocicli) che non derivano da alcuna famiglia di sezioni su un ricoprimento più fine di aperti semplicemente connessi, ossia ostruzioni genuinamente topologiche, e non semplicemente insiemistiche, all'incollamento globale.

2.2 Raffinamenti e Limite Diretto

Un ricoprimento V = {V_j}{*j*∈*J*} *si dice* ***raffinamento*** *di* $U = \{U_i\}_{i \in I}$ se esiste una funzione λ: J → I tale che V_j ⊆ U_{λ(j)} per ogni j ∈ J. Un raffinamento induce morfismi naturali:

λ*: Č^p(U, F) → Č^p(V, F)

definiti da (λ*α){*j_0,...,j_p*} = ϱ{U_{λ(j_0)∩...∩λ(j_p)}, V_{j_0}∩...∩V_{j_p}}(α_{λ(j_0),...,λ(j_p)}).

Questi morfismi sono compatibili con il cobordo e inducono quindi morfismi in coomologia:

λ*: Ȟ^p(U, F) → Ȟ^p(V, F)

Si può dimostrare che, a meno di isomorfismo canonico, questi morfismi sono indipendenti dalla scelta della funzione di raffinamento λ. L'insieme dei ricoprimenti aperti di X, ordinato per raffinamento, forma un sistema diretto, e si definisce la **coomologia di Čech** di F come:

Ȟ^p(X, F) = lim_{→ U} Ȟ^p(U, F)

dove il limite diretto è preso su tutti i ricoprimenti aperti di X.

Il passaggio al limite diretto sui raffinamenti è ciò che rende $\check{H}^i(X, F)$ un invariante intrinseco di X e non dell'atlante scelto per calcolarlo — proprietà indispensabile in cartografia, dove atlanti diversi (UTM, proiezione di Lambert, sistema geografico a gradi) descrivono la medesima superficie fisica e non devono produrre valutazioni coomologiche discordanti. In pratica, per un ricoprimento fissato U, la mappa naturale $\check{H}^i(U, F) \to \check{H}^i(X, F)$ è un isomorfismo non appena U è **abbastanza fine**, condizione resa precisa dal teorema di Leray discusso nella Sezione 2.3: è sufficiente che ogni intersezione finita di aperti di U sia aciclica rispetto a F. Nella pratica cartografica ciò significa, se gli atlanti sono costruiti in modo che ogni sovrapposizione tra carte sia topologicamente semplice (contrattile), il calcolo coomologico su quell'atlante specifico già fornisce il valore esatto, senza necessità di ulteriori raffinamenti.

2.3 Teorema Fondamentale della Coomologia di Čech

Un fascio F su X si dice **aciclico** per la coomologia di Čech se $\check{H}^p(X, F) = 0$ per ogni $p > 0$. Una classe importante di fasci aciclici è costituita dai **fasci flasque** (o flosci): un fascio F è flasque se per ogni inclusione $U \subseteq V$ di aperti, il morfismo di restrizione $F(V) \to F(U)$ è suriettivo.

Il risultato fondamentale della teoria è il seguente:

Teorema: Se F è un fascio su uno spazio paracompatto X, allora la coomologia di Čech di F coincide con i funtori derivati del funtore delle sezioni globali:

$$\check{H}^p(X, F) \cong H^p(X, F) = R^p \Gamma(X, F)$$

dove $H^p(X, F)$ denota il p-esimo gruppo di coomologia del fascio F, calcolato mediante risoluzioni iniettive o flasque.

Questo teorema stabilisce che, almeno su spazi ragionevoli (come le varietà), la coomologia di Čech cattura completamente l'informazione coomologica del fascio, e fornisce un metodo di calcolo concreto ed esplicito.

Il **teorema di Leray** precisa ulteriormente questo risultato: se $U = \{U_i\}$ è un ricoprimento tale che ogni intersezione finita non vuota $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ è F-aciclica (cioè $H^k(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, F) = 0$ per ogni $k > 0$), allora la mappa canonica $\check{H}^i(U, F) \to H^i(X, F)$ è un isomorfismo per ogni i, senza necessità di passare al limite sui raffinamenti. Un tale ricoprimento è detto **ricoprimento di Leray** per F. Nella pratica, per il fascio costante o per il fascio delle funzioni differenziabili, un ricoprimento per aperti contrattili (ad esempio dischi coordinati) è automaticamente di Leray, il che spiega perché gli atlanti cartografici standard, tipicamente costituiti da carte omeomorfe a dischi o rettangoli, siano già sufficienti per calcolare correttamente la coomologia globale senza raffinamenti ulteriori.

2.4 Calcolo di Ostruzioni a Estensioni Globali

Uno degli utilizzi più importanti della coomologia di Čech in cartografia riguarda il calcolo delle **ostruzioni a estensioni globali di coordinate**. Consideriamo il problema seguente: data una varietà M con atlante $U = \{U_i\}_{i \in I}$ e date funzioni coordinate locali $f_i: U_i \to \mathbb{R}$, sotto quali condizioni esiste una funzione globale $f: M \to \mathbb{R}$ che estende le f_i?

Questo problema può essere formulato in termini di coomologia di Čech. Le funzioni f_i definiscono una 0-cocatena nel fascio C^∞_M. La condizione necessaria per l'esistenza di un'estensione globale è che le f_i siano compatibili sulle intersezioni, ossia che:

$f_i|\{U_i \cap U_j\} - f_j|\{U_i \cap U_j\} = 0$

Definendo $g_{ij} = f_i|\{U_i \cap U_j\} - f_j|\{U_i \cap U_j\}$, otteniamo una 1-cocatena $\delta f \in \check{C}^1(U, C^\infty_M)$. L'esistenza di un'estensione globale equivale all'annullarsi di questa cocatena, ossia $\delta f = 0$.

Più in generale, supponiamo di avere una famiglia di funzioni $f_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathbb{R}$ che soddisfano una condizione di compatibilità del secondo ordine. Queste definiscono una 1-cocatena in $\check{C}^1(U, C^\infty M)$. *L'ostruzione all'esistenza di funzioni locali f_i tali che $f_i - f_j = f\{ij\}$* su $U_i \cap U_j$ è data dalla classe di coomologia $[\delta f] \in \check{H}^2(U, C^\infty_M)$.

Nel caso specifico delle varietà differenziabili, il fascio C^∞_M è **fine** (vedi sezione 3), e quindi aciclico. Questo implica che $\check{H}^p(M, C^\infty_M) = 0$ per $p > 0$, e quindi non ci sono ostruzioni coomologiche a estendere funzioni locali a funzioni globali, purché siano soddisfatte le condizioni di compatibilità infinitesime.

Un esempio istruttivo di ostruzione non banale è offerto dal fascio $\mathbb{R}_M$ *dei germi di funzioni mai nulle, con operazione moltiplicativa: la sequenza esatta esponenziale $0 \to \mathbb{Z}_M \to C^\infty_M \to^{\{exp(2\pi i \cdot)\}} (C^\infty_M)^\times \to 0$* (qui si intende C^∞_M a valori complessi) dà luogo, tramite la successione lunga in coomologia, a un morfismo di collegamento $H^0((C^\infty_M)^\times) \to H^1(M, \mathbb{Z})$, *il cui valore su una funzione mai nulla f misura precisamente il numero di avvolgimento o indice topologico di f attorno all'origine. In cartografia, un fenomeno analogo si presenta nel problema di assegnare in modo continuo una direzione di riferimento (ad esempio il "nord") su un atlante: se M ha genere diverso da zero o presenta ostruzioni topologiche (come accade localmente attorno ai poli, dove la nozione di "est" e "ovest" degenera), la classe in $H^1(M, \mathbb{Z})$ corrispondente misura esattamente l'impossibilità di una scelta globale coerente, un fenomeno strettamente imparentato con il teorema della palla pelosa richiamato nel trattato* The Impossibility Theorems of Cartography*.

2.5 Esempio: Il Problema della Longitudine

Un esempio classico di ostruzione coomologica in cartografia è il **problema della definizione globale della longitudine** sulla sfera S^2. Consideriamo il ricoprimento standard di S^2 dato da due aperti:

$U_N = S^2 \setminus \{\text{polo sud}\}$, $U_S = S^2 \setminus \{\text{polo nord}\}$

con $U_N \cap U_S$ omeomorfo a $S^1 \times (0,1)$. In coordinate sferiche standard (θ, φ) dove $\theta \in [0, \pi]$ è la colatitudine e $\varphi \in [0, 2\pi)$ è la longitudine, possiamo definire funzioni coordinate:

$\varphi_N: U_N \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\varphi_S: U_S \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

La funzione di transizione $\varphi_N - \varphi_S$ su $U_N \cap U_S$ non è zero, ma assume valori in $\mathbb{Z}$ (a meno di multipli di 2π). Questo definisce una classe di coomologia non banale in $\check{H}^1(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, che rappresenta l'ostruzione topologica a definire una funzione longitudine globale continua sulla sfera.

Più precisamente, la scelta di una determinazione della longitudine corrisponde alla scelta di una sezione del fibrato principale $\pi: S^2 \times \mathbb{R} \to S^2$ quozientato dall'azione di $\mathbb{Z}$ per traslazioni. L'esistenza di una tale sezione è ostacolata dalla classe di Eulero del fibrato, che corrisponde alla classe fondamentale di S^2 in $H^2(S^2, \mathbb{Z})$.

Storicamente, il problema della longitudine non era di natura puramente coomologica ma strumentale: la determinazione della longitudine richiede la conoscenza simultanea dell'ora locale (dedotta dalla posizione del sole) e dell'ora in un luogo di riferimento (originariamente Greenwich), quest'ultima ottenibile solo

mediante cronometri di precisione o, in precedenza, tavole astronomiche delle lune di Giove. Ciò che la lettura coomologica aggiunge non è la soluzione del problema strumentale, bensì la sua corretta collocazione teorica: il fascio delle funzioni "longitudine locale" definite a meno di una costante additiva su ciascuna carta è ben posto solo se esiste una sezione globale coerente del fascio delle differenze di longitudine, la cui esistenza è garantita dalla struttura di fascio costante $\mathbb{R}_M$ su un atlante connesso — la vera difficoltà storica risiedeva dunque interamente nella misurazione della sezione, non nella sua esistenza teorica, che la struttura di fascio banale garantiva fin dall'inizio.

2.6 Sequenza Esatta di Mayer-Vietoris

Un'altra applicazione importante della coomologia di Čech è la **sequenza esatta di Mayer-Vietoris**, che permette di calcolare la coomologia di uno spazio come somma delle coomologie delle sue parti. Sia $X = U \cup V$ l'unione di due aperti U e V. Per ogni fascio F su X, esiste una sequenza esatta lunga in coomologia:

$$0 \to \check{H}^0(X, F) \to \check{H}^0(U, F) \oplus \check{H}^0(V, F) \to \check{H}^0(U \cap V, F) \to^{\delta}$$

$$\to^{\delta} \check{H}^1(X, F) \to \check{H}^1(U, F) \oplus \check{H}^1(V, F) \to \check{H}^1(U \cap V, F) \to^{\delta}$$

$$\to^{\delta} \check{H}^2(X, F) \to \dots$$

dove i morfismi sono indotti dalle restrizioni e il morfismo di connessione $\delta: \check{H}^p(U \cap V, F) \to \check{H}^{p+1}(X, F)$ è definito in modo naturale dalla struttura del complesso di Čech.

Questa sequenza è fondamentale per calcoli espliciti in coomologia e per dimostrare risultati di tipo ricorsivo sulla struttura coomologica di spazi complessi costruiti per incollamento.

La sequenza di Mayer-Vietoris è particolarmente efficace nel calcolo esplicito della coomologia di atlanti cartografici a due carte, il caso più comune nella pratica (proiezioni stereografiche polari, carte a doppio emisfero). Per l'atlante a due carte U, V della sfera S^2 discusso nella Sezione 1.7, con $U \cap V$ omotopicamente equivalente a un cerchio S^1, la sequenza di Mayer-Vietoris per il fascio costante $\mathbb{R}$ si riduce a $0 \to H^0(S^2) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(S^2) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to H^2(S^2) \to 0$. Poiché U e V sono dischi (quindi aciclici) e $U \cap V \simeq S^1$ ha $H^0 = \mathbb{R}$ e $H^1 = \mathbb{R}$, un calcolo diretto delle dimensioni fornisce $H^0(S^2) = \mathbb{R}$, $H^1(S^2) = 0$, $H^2(S^2) = \mathbb{R}$, in accordo con la ben nota coomologia della sfera — un caso di verifica che conferma la coerenza del formalismo con la topologia elementare della Terra idealizzata.

2.7 Complessità Computazionale del Calcolo Coomologico

Dal punto di vista algoritmico, il calcolo della coomologia di Čech per un ricoprimento finito $U = \{U_1,\dots,U_n\}$ si riduce all'algebra lineare sul complesso dei cocatene, il cui differenziale δ^i è rappresentabile come matrice sparsa di dimensione pari al numero di $(i+1)$-uple di aperti con intersezione non vuota. Per un fascio localmente costante a valori in un campo, il calcolo di H^i richiede il rango di δ^i e δ^{i-1}, ottenibile in tempo $O(N^3)$ tramite eliminazione gaussiana o, più efficientemente, tramite forma normale di Smith se il fascio è a valori interi, con complessità $O(N^{2.376})$ usando algoritmi di moltiplicazione matriciale rapida. Per atlanti cartografici reali, dove il numero di carte N è tipicamente dell'ordine delle decine o centinaia (ad esempio i 60 fusi UTM), tale calcolo è del tutto trattabile; la difficoltà pratica risiede piuttosto nella corretta triangolazione delle intersezioni multiple $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$, un problema di geometria computazionale discusso più diffusamente nella Sezione 7.8 in relazione alla persistent sheaf cohomology.

3. Fasci Soft e Fine: Proprietà di Aciclicità

3.1 Fasci Soft

Un fascio F su uno spazio topologico X si dice **soft** (morbido) se per ogni sottoinsieme chiuso $A \subseteq X$, il morfismo di restrizione:

$\varrho_A: \Gamma(X, F) \to \Gamma(A, F|_A)$

è suriettivo, dove $F|_A$ denota la restrizione del fascio F al chiuso A e $\Gamma(A, F|_A)$ sono le sezioni di $F|_A$ su A.

Intuitivamente, un fascio è soft se ogni sezione locale su un chiuso può essere estesa a una sezione globale su tutto lo spazio. Questa è una condizione molto forte, che implica in particolare che il fascio non ha ostruzioni coomologiche di ordine superiore.

Teorema (Aciclicità dei Fasci Soft): Sia X uno spazio paracompatto. Se F è un fascio soft su X, allora:

$H^p(X, F) = 0$ per ogni $p > 0$

Questo teorema afferma che i fasci soft sono aciclici, e quindi possono essere utilizzati per calcolare la coomologia di altri fasci mediante risoluzioni.

La softness è una proprietà topologicamente robusta: ogni fascio flabby (flasque), cioè tale che ogni restrizione $F(X) \to F(U)$ sia surgettiva per U aperto qualunque, è automaticamente soft, e ogni fascio soft è aciclico su spazi paracompatti — implicazione che sarà sfruttata sistematicamente nella Sezione 3.4 per costruire risoluzioni acicliche computabili. In ambito cartografico, i fasci flabby sorgono naturalmente come fasci di germi di funzioni **discontinue** arbitrarie (privi di alcun vincolo di regolarità), poiché una funzione definita su un chiuso può sempre essere estesa arbitrariamente al di fuori di esso; questa osservazione, per quanto banale, è alla base della costruzione della risoluzione flabby canonica di Godement, che fornisce una dimostrazione uniforme dell'esistenza di risoluzioni acicliche per qualsiasi fascio, indipendentemente dalla sua natura geometrica.

3.2 Fasci Fine

Un fascio F di moduli su C^0_X (il fascio delle funzioni continue a valori reali) si dice **fine** se per ogni ricoprimento aperto localmente finito $U = \{U_i\}_{i \in I}$ *di X, esiste una famiglia* $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ di endomorfismi di F tale che:

1. Ciascun $\varphi_i: F \to F$ è un morfismo di fasci di C^0_X-moduli
2. Il supporto di φ_i (l'insieme dei punti dove $\varphi_i \neq 0$) è contenuto in U_i
3. $\Sigma_{i \in I} \varphi_i = \mathrm{id}_F$ (somma che ha senso perché localmente finita)

La famiglia $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ è chiamata **partizione dell'unità** subordinata al ricoprimento U.

I fasci fine generalizzano i fasci soft e hanno anch'essi proprietà di aciclicità. In particolare:

Teorema: Sia X uno spazio paracompatto. Se F è un fascio fine su X, allora F è soft, e quindi:

$H^p(X, F) = 0$ per ogni $p > 0$

La finezza, a differenza della softness, dipende crucialmente dalla struttura di C^∞_M-modulo del fascio, e non solo dalla sua struttura topologica sottostante: un fascio fine deve ammettere endomorfismi F → F indicizzati da una partizione dell'unità {ϱ_i} subordinata a un qualsiasi ricoprimento, con supporto di ciascun endomorfismo contenuto nel corrispondente aperto e somma pari all'identità. I fasci Ω^p_M delle p-forme, così come il fascio tangente TM e più in generale ogni fascio dei germi di sezioni di un fibrato vettoriale liscio, sono fini precisamente perché ammettono moltiplicazione per funzioni C^∞, laddove fasci di natura puramente algebrica o topologica (ad esempio il fascio costante ℤ_M) non lo sono in generale — ciò spiega perché H^i(M, ℤ_M) possa essere non banale (codificando la topologia di M) mentre H^i(M, Ω^p_M) si annulla sempre per i > 0 su varietà paracompatte, per quanto le due situazioni riguardino la stessa varietà M.

3.3 Partizioni dell'Unità e Applicazioni Cartografiche

Nel contesto delle varietà differenziabili, il fascio C^∞*M è fine. Infatti, data una varietà M e un ricoprimento aperto localmente finito U = {U_i}{i∈I}*, esiste sempre una **partizione differenziabile dell'unità** subordinata a U, ossia una famiglia di funzioni {ϱ_i: M → [0,1]}_{i∈I} di classe C^∞ tali che:

1. supp(ϱ_i) ⊆ U_i per ogni i ∈ I
2. Σ_{i∈I} ϱ_i = 1 identicamente su M

Le partizioni dell'unità sono uno strumento fondamentale in geometria differenziale, poiché permettono di "localizzare" costruzioni globali e di "incollare" dati locali in modo differenziabile.

In cartografia, le partizioni dell'unità possono essere utilizzate per costruire **funzioni di transizione smussate** tra diverse carte locali. Supponiamo di avere un atlante {(U_α, φ_α)}{*a∈A*} *e di voler definire una rappresentazione "blended" che interpola dolcemente tra le diverse proiezioni. Data una partizione dell'unità* {*ϱ_a*}{α∈A} subordinata al ricoprimento {U_α}_{α∈A}, possiamo definire una "meta-proiezione" locale Φ in un punto p ∈ M come:

Φ(p) = Σ_{α: p∈U_α} ϱ_α(p) · φ_α(p)

dove la somma è su tutte le carte che contengono p. Questa costruzione fornisce una transizione continua e differenziabile tra le diverse rappresentazioni locali.

Nella prassi cartografica digitale, le partizioni dell'unità offrono lo strumento tecnico standard per la **fusione di dati multi-sorgente** (data fusion): quando misurazioni di una medesima grandezza (temperatura, densità di popolazione, quota) provengono da fonti diverse su carte sovrapposte, anziché scegliere arbitrariamente una fonte nella zona di sovrapposizione si costruisce una funzione di fusione f = Σ_i ϱ_i f_i, dove {ϱ_i} è una partizione dell'unità subordinata all'atlante delle fonti; il risultato f è automaticamente liscio se le f_i lo sono, e interpola in modo continuo tra le diverse sorgenti nelle zone di transizione. Questa tecnica, nota in letteratura GIS come **feathering** o **blending**, è precisamente un'istanza della dimostrazione categoriale di acyclicità dei fasci fini: la possibilità stessa di costruire f senza discontinuità è garantita dalla finezza del fascio C^∞_M.

3.4 Risoluzioni Fine e Calcolo della Coomologia

Un'applicazione cruciale dei fasci fine è la possibilità di calcolare la coomologia di fasci arbitrari mediante risoluzioni fine. Una **risoluzione** di un fascio F è una sequenza esatta:

0 → F → F^0 → F^1 → F^2 → ...

dove i fasci F^i sono dotati di buone proprietà (ad esempio, sono iniettivi, soft, o fini).

Teorema (de Rham-Weil): Sia F un fascio su una varietà differenziabile M e sia:

$0 \to F \to F^0 \to F^1 \to F^2 \to ...$

una risoluzione di F mediante fasci fini F^i. Allora:

$H^p(M, F) \cong H^p(\Gamma(M, F^\bullet))$

dove il termine di destra denota la coomologia del complesso di sezioni globali:

$0 \to \Gamma(M, F^0) \to \Gamma(M, F^1) \to \Gamma(M, F^2) \to ...$

Questo teorema riduce il calcolo dei gruppi di coomologia di fasci a un calcolo puramente algebrico su complessi di gruppi abeliani.

La strategia generale — sostituire un fascio F con una risoluzione $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to ...$ per fasci acidici I^k, e calcolare H^i(M,F) come coomologia del complesso $\Gamma(M,I^\bullet)$ — è l'analogo, nel contesto dei fasci, della risoluzione proiettiva o iniettiva in algebra omologica classica, e la sua indipendenza dalla risoluzione scelta è conseguenza del lemma di confronto standard per complessi acidici. Nella pratica del calcolo numerico su dati cartografici discretizzati (raster, mesh triangolari), questa strategia si traduce nell'uso di risoluzioni **simpliciali** o **cellulari** al posto delle risoluzioni fini continue: il complesso di cocatene simpliciali associato a una triangolazione dell'atlante gioca il ruolo del complesso di de Rham discreto, e il teorema di de Rham discreto (discusso nella sezione seguente in versione continua) garantisce che i due calcoli — analitico e combinatorio — producano risultati coerenti.

3.5 Il Teorema di de Rham

Il più celebre esempio di questo principio è il **teorema di de Rham**, che stabilisce un isomorfismo canonico tra la coomologia di de Rham (definita mediante forme differenziali) e la coomologia singolare a coefficienti reali.

Il complesso di de Rham:

$0 \to \mathbb{R}_M \to \Omega^0_M \to^d \Omega^1_M \to^d \Omega^2_M \to^d ... \to^d \Omega^n_M \to 0$

è una risoluzione fine del fascio costante $\mathbb{R}_M$, poiché:

1. La sequenza è esatta nei gradi positivi (lemma di Poincaré locale)
2. I fasci Ω^p_M sono fini (ammettono partizioni dell'unità)

Applicando il teorema di de Rham-Weil, otteniamo:

$H^p(M, \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M) = \ker(d: \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)) / \operatorname{im}(d: \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$

dove $\Omega^p(M) = \Gamma(M, \Omega^p_M)$ denota lo spazio delle p-forme differenziabili globali su M, e $H^p_{dR}(M)$ è la coomologia di de Rham.

Il teorema di de Rham ha profonde implicazioni topologiche e geometriche. In particolare, stabilisce che gli invarianti topologici di una varietà (i numeri di Betti, i gruppi di coomologia) possono essere calcolati mediante strumenti del calcolo differenziale (forme differenziali e l'operatore di differenziale esterno).

Il teorema di de Rham stabilisce un ponte fondamentale tra due mondi apparentemente distanti: la coomologia $H^i_{dR}(M)$, definita analiticamente tramite forme differenziali e derivate, e la coomologia singolare $H^i(M, \mathbb{R})$, definita puramente in termini della topologia sottostante di M, tramite simplessi singolari continui e senza alcun riferimento a una struttura differenziabile. L'isomorfismo, realizzato esplicitamente dall'integrazione di una forma chiusa su un ciclo singolare (formula di de Rham $\int_\gamma \omega$), implica in particolare che gli invarianti coomologici calcolati nella Sezione 2.6 tramite Mayer-Vietoris per il fascio costante $\mathbb{R}$ coincidono numericamente con quelli ottenibili integrando forme differenziali esplicite — offrendo così due metodi indipendenti, l'uno combinatorio-topologico e l'altro analitico, per verificare la consistenza dei calcoli cartografici di ostruzione.

3.6 Applicazioni alla Teoria dell'Integrazione

La coomologia di de Rham fornisce anche il contesto naturale per la teoria dell'integrazione su varietà. Dato un ciclo p-dimensionale γ (ossia una catena singolare senza bordo) e una p-forma chiusa ω (ossia $d\omega = 0$), l'integrale:

$$\int_\gamma \omega$$

dipende solo dalla classe di coomologia di ω e dalla classe di omologia di γ. Questo definisce un accoppiamento bilineare:

$$H_p(M, \mathbb{R}) \times H^p_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

chiamato **accoppiamento di de Rham**, che realizza la dualità di Poincaré tra omologia e coomologia.

In cartografia, l'integrazione di forme differenziali permette di calcolare quantità globali (aree, volumi, flussi) a partire da densità locali. Ad esempio, l'area di una regione $R \subseteq M$ può essere calcolata come:

$$\text{Area}(R) = \int_R dA$$

dove dA è la 2-forma volume indotta dalla metrica riemanniana su M (nel caso di superfici bidimensionali).

Un'applicazione diretta di questo formalismo è il calcolo di **flussi conservati** su reti cartografiche: dato un campo vettoriale v su M rappresentante ad esempio una corrente oceanica o un flusso migratorio (si veda il trattato companion *Onde e flussi*), la 1-forma duale $\omega_v = \iota_v(\text{dvol}_g)$ è chiusa se e solo se il campo v è privo di sorgenti o pozzi (div v = 0 rispetto alla metrica g), e in tal caso il flusso totale attraverso una qualsiasi curva chiusa omotopa a un generatore di $H_1(M)$ è un invariante topologico, indipendente da deformazioni continue della curva — fatto che permette, nella pratica, di stimare portate o flussi migratori totali attraverso sezioni di misura arbitrarie, purché omotopicamente equivalenti, senza necessità di ripetere la misurazione lungo il percorso esatto originariamente monitorato.

3.7 Un Controesempio: Fasci Non Aciclici e Ostruzioni Persistenti

È istruttivo bilanciare la lunga serie di risultati di acyclicità con un controesempio esplicito. Si consideri il fascio $F = \mathbb{Z}_M$ costante a valori interi sulla sfera S^2: per quanto visto nella Sezione 2.6, $H^2(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

$\neq 0$, quindi $\mathbb{Z}_{S^2}$ non è aciclico. Questa non-acyclicità non è un difetto patologico ma riflette un fatto geometrico reale e cartograficamente rilevante: non esiste alcuna funzione a valori interi su S^2, localmente costante su un ricoprimento a due carte, i cui "salti" alla sovrapposizione codifichino una quantità globale coerente e allo stesso tempo nulla — è precisamente questa ostruzione, generatore di $H^2(S^2,\mathbb{Z})$, a costituire l'invariante topologico che impedisce (Sezione 2.4) l'esistenza di un atlante a una sola carta della sfera, ossia il fatto elementare, ma coomologicamente codificabile con precisione, che nessuna proiezione cartografica può rappresentare l'intera Terra su un unico foglio senza tagli o duplicazioni.

4. Fasci Perversi e D-Moduli per Singolarità

4.1 Motivazione: Singolarità nelle Trasformazioni Cartografiche

Le trasformazioni cartografiche, ossia le funzioni che mappano la superficie terrestre (modellata come una varietà differenziabile) su un piano o altra superficie, presentano inevitabilmente singolarità. Queste singolarità possono essere di varia natura:

- **Singolarità topologiche**: punti dove la trasformazione non è un omeomorfismo locale (ad esempio, i poli nelle proiezioni cilindriche)
- **Singolarità metriche**: punti dove la distorsione della metrica diverge
- **Singolarità differenziali**: punti dove la trasformazione non è differenziabile

La teoria dei fasci perversi e dei D-moduli fornisce un framework sofisticato per studiare il comportamento dei fasci e delle equazioni differenziali in presenza di singolarità.

Le singolarità cartografiche si presentano in almeno tre modalità distinte, ciascuna richiedente un differente livello di sofisticazione teorica: singolarità **puntuali isolate** (i poli nelle proiezioni cilindriche, dove la longitudine degenera), singolarità **lungo sottovarietà** (l'antimeridiano nelle proiezioni con taglio, o le linee di tangenza nelle proiezioni coniche), e singolarità **di natura metrica ma non topologica** (punti di curvatura gaussiana nulla su un ellissoide, dove le formule di distorsione classiche presentano indeterminazioni pur non corrispondendo ad alcuna discontinuità topologica della carta). Solo il primo e il secondo tipo richiedono propriamente gli strumenti di questo capitolo; il terzo tipo, pur avendo l'aspetto di una singolarità, è in realtà una degenerazione della metrica indotta ed è trattato più naturalmente con i metodi differenziali classici, un'importante distinzione metodologica da tenere presente nel seguito.

4.2 Stratificazioni e Condizioni di Whitney

Per trattare rigorosamente le singolarità, introduciamo la nozione di **stratificazione**. Sia X uno spazio topologico (tipicamente una varietà o uno spazio semi-algebrico). Una **stratificazione di Whitney** di X è una decomposizione:

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in A} S_\alpha$$

in sottoinsiemi disgiunti S_α, chiamati **strati**, tali che:

1. Ciascuno strato S_α è una sottovarietà differenziabile connessa di X
2. La frontiera di ogni strato è unione di strati di dimensione inferiore
3. Sono soddisfatte le **condizioni di Whitney** A e B lungo ogni coppia di strati adiacenti

Le condizioni di Whitney formalizzano l'idea che gli strati si "incollano" in modo sufficientemente regolare. Precisamente, dati due strati S_α e S_β con $S_\beta \subseteq \partial S_\alpha$, le condizioni sono:

Condizione A: Se $\{x_n\} \subseteq S_\alpha$ e $\{y_n\} \subseteq S_\beta$ sono successioni convergenti a $y \in S_\beta$, e se $T_{x_n} S_\alpha$ converge a un piano limite T in $G_d(T_y X)$ (la Grassmanniana degli spazi d-dimensionali in $T_y X$, dove $d = \dim S_\alpha$), allora $T_y S_\beta \subseteq T$.

Condizione B: Se inoltre la retta secante $x_n y_n$ converge a una retta limite L, allora $L \subseteq T$.

Le condizioni di Whitney (A) e (B) garantiscono che la stratificazione sia sufficientemente regolare da escludere comportamenti patologici quali strati che si "attorcigliano" attorno a strati di dimensione inferiore in modo non controllato. Nel caso cartografico canonico della proiezione cilindrica di Mercatore, la stratificazione naturale della sfera $S^2 = S^0_+ \sqcup S^0_- \sqcup S^1_{\text{eq}} \sqcup (S^2 \setminus \text{poli})$ — dove $S^0_\pm$ sono i due poli e la stratificazione procede per dimensione crescente — soddisfa banalmente le condizioni di Whitney poiché gli strati singolari sono punti isolati; situazioni più complesse, quali le stratificazioni indotte da confini politici con punti tripli (dove tre o più nazioni si incontrano), richiedono invece una verifica non banale delle condizioni di frontiera, ed è in questi casi che l'apparato tecnico completo della teoria delle stratificazioni di Whitney trova la sua piena giustificazione applicativa.

4.3 Fasci Costruibili

Dato uno spazio stratificato (X, S) dove $S = \{S_\alpha\}_{a \in A}$ *è una stratificazione, un fascio F su X si dice* ***costruibile*** *rispetto a S se la restrizione $F|_{\{S_\alpha\}}$* a ogni strato è un sistema locale (ossia un fascio localmente costante) di spazi vettoriali di dimensione finita.

I fasci costruibili catturano l'idea di fasci che possono avere comportamenti singolari, ma solo lungo i confini degli strati, mentre sono "costanti" (a meno di monodromia) all'interno di ciascuno strato.

La categoria $D^b_c(X)$ dei **complessi costruibili** (ossia complessi di fasci a coomologia costruibile) su X ha una struttura ricca, ed è la categoria naturale in cui si formulano le teorie di dualità e di immagine diretta o inversa derivata per morfismi tra spazi stratificati.

La costruibilità è la nozione di regolarità "combinatoria" appropriata per fasci definiti su spazi stratificati: un fascio F è costruibile rispetto alla stratificazione $S = \{S_\alpha\}$ se la restrizione $F|_{S_\alpha}$ è localmente costante di rango finito su ciascuno strato. La categoria $D^b_c(X)$ dei complessi di fasci a coomologia costruibile, che sarà introdotta formalmente nella Sezione 4.7 come ambiente naturale per i fasci perversi, costituisce il quadro tecnico corretto in cui collocare tutti i dati cartografici che presentano un comportamento uniforme a tratti — ad esempio l'assegnazione di una nazione di appartenenza a ciascun punto della superficie terrestre, costante su ogni strato aperto individuato dai confini politici, ma con salti attraverso i confini stessi, e con un comportamento potenzialmente ancora diverso lungo gli strati di dimensione inferiore corrispondenti ai punti tripli.

4.4 Fascio di Vanishing Cycles e Specializzazione

Uno strumento fondamentale per studiare le singolarità è il **fascio dei cicli evanescenti**. Sia $f: X \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su una varietà complessa X, e sia $t \in \mathbb{C}$ un valore critico di f. La fibra $f^{-1}(t)$ può avere singolarità, mentre per valori $s \neq t$ vicini a t la fibra $f^{-1}(s)$ è liscia.

Il fascio di vanishing cycles φ_f F misura la differenza tra il comportamento del fascio F sulla fibra speciale f^{-1}(t) e sulle fibre generali vicine. Più precisamente, per ogni punto x ∈ f^{-1}(t), la fibra (φ_f F)_x è definita come la coomologia ridotta della fibra di Milnor:

$(\varphi_f F)_x = \tilde{H}^*(F\{f,x\}, F)$

dove F_{f,x} è la fibra di Milnor in x, ossia l'intersezione di f^{-1}(s) con una piccola sfera centrata in x, per s vicino a t.

Intuitivamente, il funtore dei vanishing cycles φ_f misura quanto la topologia della fibra generica f^{-1}(t) per $t \neq 0$ "collassa" o degenera nella fibra speciale f^{-1}(0), mentre il funtore delle nearby cycles ψ_f confronta direttamente le due fibre senza sottrarre il contributo comune. Nel contesto delle trasformazioni cartografiche, si può pensare a una famiglia a un parametro di proiezioni f_t che degenera per $t \to 0$ in una proiezione singolare (ad esempio una famiglia di proiezioni coniche il cui angolo di apertura tende a zero, degenerando nella proiezione azimutale): i vanishing cycles catturano allora precisamente la topologia che "scompare" nel limite, fornendo un invariante quantitativo della severità della degenerazione, distinto dalla semplice osservazione qualitativa che la proiezione limite è singolare.

4.5 D-Moduli: Equazioni Differenziali con Singolarità

La teoria dei **D-moduli** fornisce un framework algebrico per studiare sistemi di equazioni differenziali lineari a derivate parziali, incluse quelle con singolarità. Sia X una varietà differenziabile (tipicamente complessa e liscia). Il fascio D_X degli operatori differenziali lineari su X è l'anello dei operatori della forma:

$P = \Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$

dove $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è un multi-indice, $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial^{\alpha_n}/\partial x_n^{\alpha_n}$, e a_α sono funzioni differenziabili (o olomorfe nel caso complesso).

Un **D_X-modulo** è un fascio M di moduli sul fascio D_X. Intuitivamente, un D_X-modulo codifica un sistema di equazioni differenziali lineari: le sezioni di M sono le "soluzioni" del sistema, e l'azione di D_X su M descrive come le derivate delle soluzioni sono correlate.

La categoria dei D_X-moduli coerenti è equivalente (nel caso di varietà complesse lisce) alla categoria dei complessi perversi mediante il **funtore di de Rham-risoluzione**:

$DR: \mathrm{Mod}(D_X) \to \mathrm{Perv}(X)$

che associa a ogni D_X-modulo M il complesso di de Rham $\Omega^\bullet_X \otimes_{D_X} M$.

L'algebra di Weyl $D_n = \mathbb{C}\langle x_1,...,x_n,\partial_1,...,\partial_n\rangle$, con relazioni di commutazione $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$, fornisce il linguaggio algebrico naturale per operatori differenziali a coefficienti polinomiali o razionali, e un D-modulo è precisamente un modulo su (il fascio di) questa algebra — cioè un sistema di equazioni differenziali lineari, eventualmente sovradeterminato. La rilevanza cartografica emerge quando si considerano le equazioni differenziali che definiscono le proiezioni conformi: la condizione di Cauchy-Riemann che caratterizza le trasformazioni conformi è essa stessa un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, e la sua **olonomicità** (finita dimensionalità dello spazio delle soluzioni locali) è ciò che garantisce, tramite la teoria di Riemann-Hilbert, l'esistenza di un fascio

pervertito associato le cui singolarità corrispondono esattamente ai punti di ramificazione della proiezione conforme, tipicamente localizzati ai poli della sfera nella proiezione stereografica.

4.6 Applicazione: Trasformazioni Conformi con Singolarità

Consideriamo una trasformazione cartografica f: S^2 → ℝ^2 ∪ {∞} (dove identifichiamo ℝ^2 ∪ {∞} con la sfera di Riemann $\hat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Supponiamo che f sia conforme (preserva gli angoli) ovunque tranne in un insieme finito di punti singolari {p_1, ..., p_k}.

Un esempio classico è la **proiezione stereografica** da un polo della sfera, che ha una singolarità nel polo opposto. Vicino a questa singolarità, la metrica indotta presenta un comportamento asintotico che può essere studiato mediante D-moduli.

Sia g la metrica indotta su S^2 \ {p_1, ..., p_k}. L'equazione di Laplace-Beltrami:

$\Delta_g u = 0$

dove Δ_g è l'operatore di Laplace-Beltrami associato alla metrica g, definisce un D-modulo sul complementare delle singolarità. L'estensione di questo D-modulo attraverso le singolarità può essere studiata mediante la teoria dei D-moduli olonomi e delle singolarità regolari.

Un esempio esplicito è offerto dalla proiezione di Mercatore, ottenibile come composizione della proiezione stereografica con il logaritmo complesso: z ↦ log(z). Il logaritmo complesso è una funzione olomorfa multivaluata con punto di diramazione logaritmico nell'origine (corrispondente a un polo della sfera) e nel punto all'infinito (corrispondente all'altro polo); il D-modulo associato all'equazione differenziale z·w'(z) = 1 che caratterizza log localmente ha monodromia non banale attorno all'origine, riflesso algebrico preciso del fatto ben noto che la proiezione di Mercatore manda i poli all'infinito e non è definita su di essi. La teoria dei D-moduli fornisce così una spiegazione strutturale, e non meramente osservazionale, del motivo per cui ogni proiezione conforme cilindrica debba necessariamente omettere almeno un punto della sfera.

4.7 Fasci Perversi: Definizione e Proprietà

I **fasci perversi** sono una classe speciale di complessi costruibili che generalizzano simultaneamente i fasci localmente costanti e i complessi di de Rham. La definizione precisa richiede la nozione di **t-struttura** perversa sulla categoria derivata.

Sia X uno spazio stratificato di dimensione complessa n. Un complesso K^• ∈ D^b_c(X) appartiene alla categoria dei fasci perversi Perv(X) se soddisfa le condizioni di supporto e di cosupporto:

- dim supp(H^i(K^•)) ≤ -i per ogni i
- dim supp(H^i(D_X K^•)) ≤ -i per ogni i

dove D_X è il funtore di dualità di Verdier (vedi sezione 6) e supp denota il supporto.

Queste condizioni possono sembrare tecniche, ma hanno un significato geometrico profondo: assicurano che il complesso K^• abbia la giusta "distribuzione di coomologia" lungo gli strati, in modo da essere "autoduale" rispetto alla dualità di Verdier (a meno di shift).

Proprietà fondamentali dei fasci perversi:

1. Perv(X) è una sottocategoria abeliana di D^b_c(X)
2. Se X è liscio di dimensione n, il fascio costante $\mathbb{Q}_X[n]$ (shiftato di n) è perverso
3. La dualità di Verdier stabilizza Perv(X) e definisce un'anti-equivalenza

La t-struttura perversa su D^b_c(X), pur essendo definita da condizioni di supporto apparentemente tecniche (dim supp H^i(F) ≤ -i e condizioni duali sui costi), è motivata dal desiderio di ottenere una categoria abeliana Perv(X) che si comporti, per spazi singolari, in modo analogo ai fasci localmente costanti su varietà lisce — in particolare, gli oggetti semplici di Perv(X) sono classificati dai **fasci di intersezione coomologia** IC(Z, L) associati a sottovarietà chiuse irriducibili Z con sistema locale L su un aperto denso liscio di Z, generalizzazione diretta della decomposizione in componenti irriducibili che, nel caso cartografico, corrisponde alla scomposizione naturale di un territorio politicamente frammentato nelle sue regioni amministrative massimali, ciascuna eventualmente ulteriormente stratificata da confini interni di rango inferiore.

4.8 Teorema di Decomposizione e Applicazioni

Uno dei risultati più importanti della teoria è il **teorema di decomposizione** di Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber. Sia f: X → Y un morfismo proprio tra varietà stratificate. Allora l'immagine diretta derivata:

Rf_*: D^b_c(X) → D^b_c(Y)

preserva i fasci perversi (a meno di shift), e inoltre Rf_* di un fascio perverso si decompone canonicamente in somma diretta:

Rf_* P ≅ ⊕*i (^p H^i(Rf** P))[-i]

dove ^p H^i denota la i-esima coomologia perversa.

Questa decomposizione ha profonde conseguenze in geometria algebrica e teoria delle rappresentazioni, e può essere applicata allo studio delle singolarità nelle trasformazioni cartografiche. Ad esempio, permette di analizzare come le proprietà topologiche e geometriche si "trasferiscono" da una rappresentazione cartografica a un'altra attraverso una trasformazione con singolarità.

Il teorema di decomposizione di Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber, applicato a una mappa propria f: X → Y tra spazi (algebrici o analitici) con X liscio, afferma che il push-forward derivato Rf_ *IC_X si decompone in una somma diretta (a shift e twist) di fasci di intersezione coomologia su Y, senza termini "misti" di grado intermedio. In termini cartografici, applicato a una mappa di proiezione con fibre di dimensione variabile (ad esempio il collasso di un'intera regione costiera frastagliata a un singolo punto in una rappresentazione a bassa risoluzione), il teorema garantisce che l'informazione topologica della regione di partenza si distribuisce nella regione di arrivo in blocchi puri e ben separati per grado coomologico, piuttosto che mescolarsi in modo incontrollabile — proprietà di purezza** che è alla base delle tecniche di semplificazione multi-scala discusse più diffusamente nel Capitolo 7 in relazione all'analisi topologica dei dati.

4.9 Esempio Numerico: Singolarità nella Proiezione di Mercatore

Per rendere quantitativo il legame tra teoria dei D-moduli e distorsione cartografica, si consideri il fattore di scala della proiezione di Mercatore, $k(\varphi) = 1/\cos(\varphi) = \sec(\varphi)$, dove φ è la latitudine. Questo fattore, finito e regolare per ogni $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, diverge quando $\varphi \to \pm\pi/2$, ossia esattamente ai poli — i punti di diramazione logaritmica identificati nella Sezione 4.6. L'ordine del polo del fattore di scala (un polo

semplice di sec(φ) in termini della variabile locale ε = π/2 - φ, poiché sec(π/2-ε) ~ 1/ε) è direttamente collegato all'esponente caratteristico della monodromia del D-modulo associato: la teoria di Riemann-Hilbert permette, in linea di principio, di predire la natura (logaritmica, polare, di ramificazione algebrica) di qualunque singolarità di scala di una proiezione conforme a partire esclusivamente dai dati algebrici del sistema di equazioni differenziali che la definisce, senza necessità di un'analisi asintotica caso per caso condotta separatamente per ciascuna proiezione.

5. Teoria dei Topos Applicata

5.1 Topos di Grothendieck e Fasci

Un **topos di Grothendieck** è una categoria che si comporta come la categoria dei fasci su uno spazio topologico, ma definita in modo più astratto. Precisamente, un topos di Grothendieck è una categoria E dotata di:

1. Limiti e colimiti finiti
2. Un oggetto generatore
3. Esistenza di equalizzatori effettivi
4. Ogni epimorfismo è quoziente di una relazione di equivalenza

Il prototipo di topos è la categoria Sh(X) dei fasci di insiemi su uno spazio topologico X. Più in generale, dato un sito (C, J), ossia una categoria piccola C dotata di una topologia di Grothendieck J (che specifica quali famiglie di morfismi sono "coprimenti"), si può definire il topos Sh(C, J) dei fasci su (C, J).

La teoria dei topos estende la teoria dei fasci a contesti dove non c'è necessariamente uno spazio topologico sottostante, ma solo una nozione astratta di "ricoprimento locale". Questo è cruciale in molte aree della matematica moderna, dalla geometria algebrica alla logica categoriale.

Un sito di Grothendieck è una categoria C dotata di una **topologia di Grothendieck**, ossia un'assegnazione a ogni oggetto U di una collezione di "ricoprimenti" (famiglie di morfismi {U_i → U}), soggetta ad assiomi di stabilità per composizione e cambio di base che generalizzano esattamente le proprietà dei ricoprimenti aperti insiemistici. Il topos Sh(C) dei fasci su tale sito eredita allora tutte le proprietà categoriali essenziali della categoria Sh(X) per X spazio topologico — esistenza di limiti e colimiti, oggetto classificante dei sottooggetti, logica interna intuizionista — pur non provenendo necessariamente da alcun spazio topologico insiemistico sottostante. Questa generalizzazione permette, come mostrato nella Sezione 5.4, di trattare uniformemente fenomeni cartografici che coinvolgono simmetrie discrete (gruppi di trasformazioni di coordinate) accanto a fenomeni genuinamente continui.

5.2 Logica Interna di un Topos

Uno degli aspetti più affascinanti della teoria dei topos è che ogni topos E ha una **logica interna**, ossia un linguaggio logico in cui si possono formulare ed dimostrare asserzioni "all'interno" di E. Questa logica è intuizionistica (non classica), nel senso che il terzo escluso (P ∨ ¬P) non è generalmente valido.

Gli oggetti di E sono interpretati come "insiemi variabili" o "fasci di insiemi", e le operazioni logiche (congiunzione, disgiunzione, implicazione, quantificatori) hanno interpretazioni categoriali naturali:

- La congiunzione A ∧ B corrisponde al prodotto A × B
- La disgiunzione A ∨ B corrisponde al coprodotto A ⊔ B

- L'implicazione $A \Rightarrow B$ corrisponde all'oggetto esponenziale B^A
- Il quantificatore esistenziale $\exists x \in A. P(x)$ corrisponde all'immagine diretta
- Il quantificatore universale $\forall x \in A. P(x)$ corrisponde all'immagine diretta destra

Questa corrispondenza, nota come **corrispondenza di Curry-Howard-Lambek**, stabilisce un legame profondo tra logica, teoria delle categorie e teoria dei tipi.

La logica interna di un topos è, in generale, **intuizionista** anziché classica: il principio del terzo escluso $p \vee \neg p$ non è valido internamente in un topos arbitrario, riflesso categoriale del fatto che, per un fascio su uno spazio X, la negazione di una proprietà locale non equivale in generale all'affermazione della proprietà opposta su tutto l'aperto complementare, a causa di possibili "zone grigie" alla frontiera. Questa osservazione ha una traduzione cartografica precisa: la proposizione "il punto p appartiene alla nazione A" e la sua negazione "il punto p non appartiene alla nazione A" non esauriscono logicamente tutte le possibilità quando p giace esattamente su un confine conteso o mal definito, e il topos dei fasci su una stratificazione con confini sfumati fornisce un modello matematico rigoroso — anziché meramente euristico — di questa indeterminazione, distinto sia dalla logica booleana classica sia da un semplice ricorso a valori di verità sfumati (fuzzy) ad hoc.

5.3 Ragionamento Geometrico in Categorie di Fasci

Nel contesto cartografico, la logica interna dei topos può essere utilizzata per formalizzare il **ragionamento geometrico** su spazi che variano continuamente. Supponiamo di avere una famiglia di carte cartografiche parametrizzata da uno spazio B (ad esempio, il parametro potrebbe essere il tempo, o una scala di zoom).

Possiamo modellare questa situazione come un topos Sh(B) di fasci su B. Un "insieme variabile" in Sh(B) è essenzialmente una famiglia di insiemi $\{X_b\}_{b \in B}$ *che varia continuamente con b. Una "funzione variabile" f:* $X \to Y$ *in Sh(B) è una famiglia di funzioni* $\{f_b: X_b \to Y_b\}_{b \in B}$.

Il ragionamento nella logica interna di Sh(B) permette di formulare e dimostrare proprietà che valgono "uniformemente" per tutti i parametri $b \in B$. Ad esempio, possiamo enunciare e dimostrare teoremi del tipo:

"Per ogni carta locale $\varphi: U \to \mathbb{R}^2$, se φ è conforme allora preserva gli angoli"

dove la quantificazione "per ogni carta locale" è interpretata internamente al topos, e quindi si riferisce a famiglie parametriche di carte locali.

Il metodo del "ragionamento generalizzato" (generalized element reasoning), sviluppato sistematicamente da Mac Lane e Moerdijk, permette di dimostrare identità e proprietà universali in un topos arbitrario ragionando come se si trattasse della categoria degli insiemi, purché si sostituiscano gli elementi ordinari con **elementi generalizzati** (morfismi da un oggetto di prova T arbitrario) e si prestiin attenzione a non usare il terzo escluso o l'assioma della scelta illimitatamente. Questa tecnica ha un valore pratico immediato per il cartografo teorico: molte dimostrazioni di incollamento e compatibilità che nel Capitolo 1 sono state condotte "a mano" per il caso insiemistico si trasferiscono automaticamente, mutatis mutandis, a qualsiasi topos di fasci su un sito cartografico generalizzato, senza necessità di riscrivere la dimostrazione da zero per ciascun nuovo contesto (fasci su schemi, su orbifold, su siti con simmetrie discrete).

5.4 Topos degli Spazi Etali e Teoria di Galois

Un esempio importante di topos è il **topos degli spazi etali** su uno schema X, denotato Et(X). Gli oggetti di questo topos sono gli spazi etali su X (ossia i morfismi $Y \to X$ che sono omeomorfismi locali), e i morfismi sono i morfismi di spazi etali sopra X.

Nel caso in cui $X = \mathrm{Spec}(K)$ è lo spettro di un campo K, il topos $\mathrm{Et}(\mathrm{Spec}(K))$ è equivalente alla categoria BG dei G-insiemi, dove $G = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ è il gruppo di Galois della chiusura separabile di K. Questa equivalenza è alla base della **teoria di Galois categoriale**, che generalizza la classica corrispondenza di Galois tra estensioni di campi e sottogruppi del gruppo di Galois.

In cartografia, un'analogia può essere fatta con i "ricoprimenti" o "sollevamenti" di una mappa base. Data una carta cartografica $\pi: M \to B$ (dove M è la superficie terrestre e B è la rappresentazione piana), i diversi "fogli" del ricoprimento possono essere pensati come diversi sistemi di coordinate locali che proiettano sullo stesso sistema base. La "monodromia" lungo curve chiuse in B descrive come i fogli si "scambiano" quando si compie un giro completo.

L'analogia tra la teoria di Galois classica (corrispondenza tra sottogruppi del gruppo di Galois e sottocampi intermedi) e la classificazione dei rivestimenti topologici (corrispondenza tra sottogruppi del gruppo fondamentale e rivestimenti connessi) trova la sua sintesi categoriale nel fatto che entrambe sono casi particolari della teoria dei **topos classificanti** BG per un gruppo (o groupoide) G: il topos dei fasci G-equivarianti su un punto classifica precisamente le G-azioni, e i rivestimenti di X corrispondono a fasci localmente costanti sul topos etale di X. In cartografia, questa costruzione si applica naturalmente ai fenomeni con **simmetria di gruppo discreto**, quale ad esempio la periodicità della longitudine (il gruppo $\mathbb{Z}$ che agisce per traslazione di 360°): il topos classificante di questa $\mathbb{Z}$-azione fornisce il quadro categoriale corretto in cui la scelta stessa del "meridiano di riferimento" appare come una scelta di punto base, anziché come un dato geografico assoluto.

5.5 Classificatore di Sottooggetti e Verità Variabile

In un topos E, esiste un oggetto speciale Ω chiamato **classificatore di sottooggetti**, che generalizza l'insieme $\{0,1\} = \{\text{false}, \text{true}\}$ dei valori di verità in teoria degli insiemi. Per ogni oggetto X in E, c'è una biiezione naturale tra sottooggetti di X (ossia monomorismi $S \rightarrowtail X$ a meno di isomorfismo) e morfismi $\chi: X \to \Omega$, chiamati **funzioni caratteristiche**.

Nel topos Sh(X) dei fasci su uno spazio topologico X, il classificatore di sottooggetti è il fascio Ω_X degli aperti di X:

$$\Omega_X(U) = \{V \subseteq U \mid V \text{ aperto}\}$$

con le restrizioni ovvie. Un sottofascio $S \subseteq F$ è classificato dal morfismo $\chi_S: F \to \Omega_X$ che a ogni sezione $s \in F(U)$ associa l'aperto massimale su cui s appartiene a S.

Questa costruzione formalizza l'idea che la "verità" in un topos non è assoluta, ma dipende dal "luogo" (punto dello spazio base). Un'asserzione P può essere vera in alcuni aperti e falsa in altri, e la funzione caratteristica $\chi_P: 1 \to \Omega_X$ (dove 1 è l'oggetto terminale) descrive esattamente "dove" P è vera.

Nel topos Sh(X) dei fasci su uno spazio topologico X, l'oggetto classificante dei sottooggetti Ω è dato esplicitamente da $\Omega(U) = \{V \subseteq U \text{ aperto}\}$, l'insieme degli aperti di U, con la sezione "vero" corrispondente all'aperto U stesso; un sottofascio $F' \subseteq F$ corrisponde allora a un morfismo caratteristico

$\chi_{F'}: F \to \Omega$ che assegna a ogni sezione $s \in F(U)$ l'aperto massimale su cui s appartiene a F'. Questa costruzione rende precisa l'idea intuitiva secondo cui, in un fascio su uno spazio cartografico, il "valore di verità" di un'affermazione (ad esempio "la sezione s rappresenta un dato valido") non è un semplice booleano ma un aperto — la regione dello spazio su cui l'affermazione è verificata — permettendo un trattamento matematicamente rigoroso di dati parzialmente validi o parzialmente affidabili su porzioni di un atlante.

5.6 Topos di Lawvere e Fasci su Categorie

Un'altra costruzione importante è il **topos di Lawvere-Tierney** o topos presheaf $\mathrm{PSh}(C) = [C^{op}, \mathrm{Set}]$ dei funtori da una categoria piccola C alla categoria degli insiemi. Questo topos non richiede una topologia di Grothendieck, e generalizza la nozione di "fascio" a contesti puramente categoriali.

Nel contesto cartografico, possiamo considerare la categoria C i cui oggetti sono diverse "scale" o "risoluzioni" di carte cartografiche, e i cui morfismi sono operazioni di "zoom" o "passaggio a scala superiore". Un funtore $F: C^{op} \to \mathrm{Set}$ assegna a ogni scala σ un insieme $F(\sigma)$ di dati cartografici (ad esempio, punti di interesse, curve di livello, etc.), e ai morfismi di zoom funzioni di "aggregazione" o "raffinamento".

Questa formalizzazione permette di trattare in modo unificato problemi multi-scala in cartografia, come la generalizzazione cartografica (semplificazione di dettagli a scale inferiori) o l'interpolazione (raffinamento di dati a scale superiori).

L'approccio di Lawvere alla teoria dei topos come **fondazione alternativa della matematica** (Elementary Theory of the Category of Sets) sposta l'accento dagli insiemi come dati primitivi alle categorie con struttura sufficiente a supportare la logica e l'aritmetica interne. Per gli scopi di questo trattato, l'aspetto rilevante non è tanto il programma fondazionale quanto la sua conseguenza tecnica: qualunque costruzione cartografica formalizzata come fascio su un sito — indipendentemente da quanto tale sito sia "geometrico" nel senso tradizionale — eredita automaticamente un ambiente logico-matematico completo (aritmetica dei numeri naturali interna, teoria degli insiemi intuizionista interna), permettendo di sviluppare l'intera matematica cartografica quantitativa (misure, integrali, equazioni differenziali) internamente al topos stesso, senza uscire mai dal linguaggio dei fasci.

5.7 Topos e Fondamenti Costruttivi della Cartografia

Un'implicazione filosoficamente rilevante della logica intuizionista interna ai topos è che essa favorisce naturalmente un approccio **costruttivo** ai teoremi di esistenza cartografici: mentre nella matematica classica un teorema di esistenza di una sezione globale può essere dimostrato per assurdo (assumendo la non esistenza e derivando una contraddizione), la validità interna in un topos arbitrario richiede una dimostrazione costruttiva, che fornisce esplicitamente — o almeno in linea di principio algoritmicamente — la sezione cercata. Questo non è un mero rigore accademico: nel contesto del calcolo numerico su dati cartografici discreti, dove l'esistenza di una soluzione deve tradursi in un algoritmo effettivo di costruzione, la disciplina costruttiva imposta dal ragionamento internalizzato in un topos fornisce una guida metodologica diretta alla progettazione di algoritmi, un collegamento esplorato più diffusamente nella Sezione 7.8.

6. Dualità di Verdier e Poincaré-Lefschetz

6.1 Il Funtore di Dualità di Verdier

Sia X uno spazio localmente compatto. Il **funtore di dualità di Verdier** è un funtore controvariant:

D_X: D^b_c(X) → D^b_c(X)

definito sulla categoria derivata dei complessi costruibili, che generalizza la dualità di Poincaré classica. Intuitivamente, D_X "inverte" un complesso di fasci scambiando coomologia con omologia e "orientando" in modo opposto.

La definizione rigorosa utilizza il fascio dualizzante ω_X e il funtore RHom:

D_X K^• = RHom(K^•, ω_X)

dove ω_X è il fascio dualizzante su X (nel caso di una varietà orientabile di dimensione n, ω_X ≅ Ω^n_X[n] è il fascio delle n-forme differenziali shiftato di n).

Proprietà fondamentali della dualità di Verdier:

1. D_X è un'anti-equivalenza di categorie: D_X ∘ D_X ≅ id
2. D_X scambia immagine diretta e immagine diretta eccezionale: D_Y ∘ Rf_* ≅ f^! ∘ D_X
3. D_X è compatibile con prodotti: D_{X×Y}(K^• ⊠ L^•) ≅ D_X K^• ⊠ D_Y L^•

Il funtore dualizzante D_X, definito da D_X(F) = RHom(F, ω_X^•) dove ω_X^• è il complesso dualizzante di X, generalizza simultaneamente la dualità di Poincaré per varietà (Sezione 6.2), la dualità di Serre in geometria algebrica, e la dualità di Alexander in topologia combinatoria. La sua proprietà caratterizzante, l'involutività D_X ∘ D_X ≅ id su D^b_c(X), è il fatto strutturale più profondo dell'intera teoria dei fasci costruibili, e ha una conseguenza cartografica di grande portata: ogni costruzione basata su fasci a supporto (immagini dirette con supporto proprio, coomologia a supporto compatto) ammette automaticamente una controparte duale basata sulla coomologia ordinaria, permettendo di dimezzare sistematicamente il lavoro dimostrativo necessario per stabilire proprietà analoghe su domini limitati e su domini illimitati o con bordo.

6.2 Dualità di Poincaré

La **dualità di Poincaré** classica afferma che per una varietà compatta orientabile M di dimensione n, esiste un isomorfismo canonico:

H^k(M, ℤ) ≅ H_{n-k}(M, ℤ)

tra il k-esimo gruppo di coomologia e il (n-k)-esimo gruppo di omologia. In termini di fasci, questo si traduce in:

H^k(M, ℤ_M) ≅ H^{n-k}(M, D_M ℤ_M)^∨

dove ℤ_M è il fascio costante degli interi, D_M è la dualità di Verdier, e (−)^∨ denota il duale algebrico.

La dualità di Verdier fornisce una formulazione molto più generale e flessibile, che vale per spazi singolari e per complessi di fasci arbitrari, non solo per il fascio costante.

La dualità di Poincaré H^i(M, ℝ) ≅ H^{n-i}_c(M, ℝ)^* per M varietà orientata di dimensione n, realizzata esplicitamente dal prodotto cup seguito dall'integrazione ∫_M: H^i × H^{n-i}_c → ℝ, ha un'immediata applicazione al calcolo di aree e capacità su territori cartografici: se M rappresenta una regione geografica

limitata con bordo (ad esempio un continente), la dualità collega gli invarianti coomologici "interni" ($H^i(M)$) a quelli "a supporto compatto" ($H^{n-i}_c(M)$), e nel caso $i=n$ questa dualità si riduce esattamente alla formula fondamentale $\int_M dvol_g = vol(M)$, interpretando la classe fondamentale $[M] \in H_n(M, \partial M)$ come il generatore duale alla funzione costante $1 \in H^0(M)$.

6.3 Dualità di Poincaré-Lefschetz per Spazi con Bordo

Nel caso di una varietà M con bordo ∂M, la dualità di Poincaré deve essere modificata per tenere conto delle condizioni al bordo. La **dualità di Poincaré-Lefschetz** stabilisce che esistono isomorfismi:

$$H^k(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$$

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \cong H_{n-k}(M, \partial M; \mathbb{Z})$$

dove $H^k(M, \partial M; \mathbb{Z})$ denota la coomologia relativa della coppia $(M, \partial M)$, e $H_{n-k}(M, \partial M; \mathbb{Z})$ l'omologia relativa.

In termini di fasci, questo corrisponde a considerare complessi con supporto nel complementare del bordo, o con sezioni che si annullano sul bordo. La dualità di Verdier si estende naturalmente a questo contesto mediante i funtori:

- $Rf_!$: immagine diretta a supporto proprio
- $f^!$: immagine inversa eccezionale

che generalizzano l'immagine diretta e inversa ordinarie.

L'estensione al caso con bordo, $H^i(M, \partial M) \cong H^{n-i}_c(M \setminus \partial M)$ *(o, in una formulazione equivalente più maneggevole, $H^i(M) \cong H^{n-i}(M, \partial M)$)*, è indispensabile per qualunque applicazione cartografica realistica, poiché le regioni geografiche di interesse — nazioni, bacini idrografici, aree amministrative — sono quasi sempre varietà con bordo (le linee di confine) piuttosto che varietà chiuse. La coppia $(M, \partial M)$, con M il territorio e ∂M il confine, permette di distinguere rigorosamente tra fenomeni "interni" al territorio (classi in $H^i(M)$) e fenomeni che coinvolgono esplicitamente il flusso attraverso il confine (classi in $H^i(M, \partial M)$ o H^i_c), distinzione essenziale ad esempio nel bilancio di flussi migratori o idrici netti attraverso una frontiera, questione ripresa nella Sezione 6.4.

6.4 Applicazioni Cartografiche: Regioni con Confini

In cartografia, molte applicazioni riguardano regioni geografiche con confini ben definiti: stati, province, bacini idrografici, etc. La dualità di Poincaré-Lefschetz permette di mettere in relazione proprietà "interne" della regione (coomologia assoluta) con proprietà "di frontiera" (coomologia relativa).

Ad esempio, consideriamo il problema di interpolare una funzione $f: \partial R \to \mathbb{R}$ definita sul confine ∂R di una regione R a una funzione armonica $F: R \to \mathbb{R}$ sull'intera regione (problema di Dirichlet). Dal punto di vista coomologico, questo può essere formulato come un problema di estensione di sezioni del fascio delle funzioni armoniche:

$$H^0(\partial R, C^\omega_{\partial R}) \to H^0(R, C^\omega_R)$$

dove C^ω denota il fascio delle funzioni analitiche reali (o armoniche). La dualità di Poincaré-Lefschetz fornisce informazioni sulle ostruzioni a tale estensione.

Applicando questo formalismo al problema del bilancio di un flusso conservato v (Sezione 3.6) attraverso il confine ∂M di una regione M, il teorema di Stokes $\int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v$ collega l'integrale di divergenza sull'interno (che, per un campo a divergenza nulla, si annulla) al flusso netto uscente attraverso il bordo, riottenendo per via puramente coomologica la legge di conservazione della massa in forma integrale. La classe di dualità di Poincaré-Lefschetz garantisce inoltre che, se M è connesso e ∂M ha più componenti connesse (ad esempio un territorio con più tratti di costa disgiunti, o più valichi di frontiera separati), il flusso netto complessivo attraverso ∂M dipende solo dalla classe di ω_v in $H^1(M,\partial M)$ e non dalla particolare decomposizione del bordo in componenti, un fatto non ovvio a priori ma reso trasparente dal formalismo duale.

6.5 Stratificazioni e Dualità

Per spazi stratificati (X, S), la dualità di Verdier deve essere formulata in modo più attento. Il fascio dualizzante ω_X non è più semplicemente il fascio delle forme di grado massimo, ma deve essere costruito "strato per strato" tenendo conto delle singolarità.

Precisamente, se $X = \bigsqcup_{\alpha} S_\alpha$ è stratificato, il fascio dualizzante ω_X è un complesso perverso tale che la sua restrizione a ogni strato S_α è il fascio di orientazione (shiftato opportunamente) di S_α:

$$\omega_X|_{S_a} \cong or_{S_\alpha}[\dim S_\alpha]$$

dove or_{S_α} è il fascio di orientazione di S_α.

La dualità di Verdier D_X: Perv(X) → Perv(X) ristretta ai fasci perversi è quindi un'anti-equivalenza che preserva la categoria dei fasci perversi e scambia estensione intermedia e !-estensione:

$$D_X(j_{!} IC_{S_a}) \cong j_{*} IC_{S_\alpha}$$

dove IC_{S_α} denota il complesso di intersezione dello strato S_α.

Per spazi stratificati singolari, la dualità di Verdier applicata ai fasci di intersezione coomologia IC_X gode di una proprietà di **autodualità**, $D_X(IC_X) \cong IC_X$ (a shift), che generalizza la dualità di Poincaré al caso singolare — proprietà notoriamente assente per la coomologia ordinaria di uno spazio singolare, che in generale non soddisfa alcuna forma di dualità di Poincaré. Questo è precisamente il motivo tecnico per cui, nel trattare cartograficamente regioni con confini frastagliati, punti tripli o coste frattali (Sezione 4.2), è la coomologia di intersezione, e non la coomologia singolare ordinaria, l'invariante topologico corretto da utilizzare per ottenere formule di dualità e di conservazione analoghe a quelle valide nel caso liscio.

6.6 Applicazione: Singolarità nelle Proiezioni Cartografiche

Consideriamo una proiezione cartografica $\pi: S^2 \to \mathbb{R}^2$ con singolarità isolate $\{p_1, ..., p_k\}$ (ad esempio, i poli in una proiezione cilindrica). Possiamo stratificare S^2 come:

$$S^2 = (S^2 \setminus \{p_1, ..., p_k\}) \sqcup \{p_1\} \sqcup ... \sqcup \{p_k\}$$

con lo strato aperto $S^2 \setminus \{p_1, ..., p_k\}$ di dimensione 2 e gli strati $\{p_i\}$ di dimensione 0.

Il fascio delle funzioni differenziabili $C^\infty_{S^2}$ *non è perverso, ma il suo "completamento perverso"* $\varphi\pi(C^\infty_{S^2})$, ottenuto mediante il funtore di vanishing cycles, lo è. La dualità di Verdier su questo completamento fornisce informazioni sul comportamento duale delle singolarità: ad esempio, una

singolarità "puntuale" nel dominio corrisponde a una singolarità "codimnensione 2" nell'immagine attraverso la dualità.

Il caso della proiezione di Mercatore, con singolarità isolate ai due poli, rientra nel regime più semplice della teoria: poiché i punti singolari hanno codimensione massima (2, ossia sono punti isolati su una superficie), la coomologia di intersezione coincide con la coomologia ordinaria a meno di correzioni concentrate esattamente nei poli, quantificabili esplicitamente tramite la formula del complesso dualizzante locale in un intorno di un punto isolato. Situazioni più complesse — ad esempio le proiezioni policonica o di Goode, che introducono tagli lungo intere curve meridiane per ridurre la distorsione globale — generano invece singolarità di codimensione 1, per le quali la correzione di intersezione coomologia rispetto alla coomologia ordinaria è generalmente non banale e richiede il calcolo esplicito dei fasci di vanishing cycles introdotti nella Sezione 4.4 lungo l'intera curva di taglio.

6.7 Complessi di Fasci e la Categoria Derivata

L'intero formalismo di questo capitolo presuppone implicitamente il passaggio dalla categoria abeliana Sh(X) dei fasci alla sua **categoria derivata** D(Sh(X)), i cui oggetti sono complessi di fasci a meno di quasi-isomorfismo. Questo passaggio, apparentemente un tecnicismo, è in realtà indispensabile: funtori quali Rf_* (immagine diretta derivata) o RHom non sono in generale rappresentabili all'interno della sola categoria abeliana, e la loro corretta definizione richiede di lavorare sistematicamente con risoluzioni e di identificare oggetti quasi-isomorfi. In termini cartografici, il passaggio alla categoria derivata corrisponde a rinunciare a trattare un singolo dato cartografico (un fascio) come oggetto primitivo, sostituendolo con l'intera classe di dati storicamente equivalenti (rilevazioni ridondanti, correzioni successive, aggiornamenti) che calcolano la medesima informazione coomologica finale — punto di vista che risulterà particolarmente naturale nel Capitolo 7, dove i dati stessi sono intrinsecamente multi-scala e multi-temporali.

7. Persistent Sheaf Cohomology

7.1 Topological Data Analysis e Omologia Persistente

La **topological data analysis** (TDA) è un campo relativamente recente che applica metodi della topologia algebrica all'analisi di dati. L'idea fondamentale è che i dati (ad esempio, nuvole di punti in $\mathbb{R}^n$) possono essere dotati di una struttura topologica mediante costruzioni come il complesso di Čech o il complesso di Vietoris-Rips, e gli invarianti topologici di queste strutture catturano informazioni "qualitative" sui dati che sono robuste rispetto al rumore.

L'**omologia persistente** è lo strumento principale della TDA. Data una filtrazione:

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n$$

di spazi topologici (tipicamente complessi simpliciali costruiti dai dati a diverse scale), l'omologia persistente studia come i gruppi di omologia $H_k(X_i)$ cambiano al variare di i. Le "features" topologiche (componenti connesse, cicli, cavità) che "persistono" per un lungo intervallo di indici i sono considerate significative, mentre quelle che appaiono e scompaiono rapidamente sono considerate rumore.

L'idea centrale della omologia persistente è di non fissare a priori una singola scala di risoluzione ε alla quale osservare un dato geometrico (ad esempio un complesso di Čech o di Vietoris-Rips costruito su una nuvola di punti), ma di far variare ε con continuità e registrare a quali valori le classi di omologia

"nascono" e "muoiono" — informazione codificata in un **modulo di persistenza**, ossia una famiglia di spazi vettoriali $H_i(\varepsilon)$ indicizzata da $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con mappe di transizione $H_i(\varepsilon) \to H_i(\varepsilon')$ per $\varepsilon \leq \varepsilon'$ compatibili per composizione. Applicata a dati cartografici, quali un insieme di rilevazioni GPS o di stazioni meteorologiche sparse, l'analisi persistente rivela strutture topologiche (buchi, componenti connesse, cavità) che sono **stabili rispetto alla risoluzione di campionamento**, distinguendole dalle strutture spurie che appaiono e scompaiono rapidamente al variare di ε e che sono verosimilmente artefatti del rumore di misurazione.

7.2 Estensione a Fasci di Gruppi Abeliani

La **persistent sheaf cohomology** estende l'omologia persistente dal contesto dei gruppi di omologia a quello dei fasci di gruppi abeliani. L'idea è di considerare non solo spazi filtrati, ma **fasci filtrati**, ossia diagrammi:

$F_0 \to F_1 \to F_2 \to \dots \to F_n$

di fasci su uno spazio X, con morfismi $F_i \to F_{i+1}$.

A ogni punto $x \in X$, i germi $\{(F_i)_x\}_{i=0}^n$ formano una sequenza di gruppi abeliani con morfismi, e possiamo calcolare l'omologia persistente di questa sequenza. Ma c'è di più: possiamo anche calcolare la coomologia globale dei fasci F_i:

$H^k(X, F_0) \to H^k(X, F_1) \to \dots \to H^k(X, F_n)$

e studiare la persistenza di questa sequenza di gruppi di coomologia.

L'estensione da moduli di persistenza (funtori dalla retta reale, vista come categoria poset, alla categoria dei gruppi abeliani) a **fasci di persistenza** su $\mathbb{R}$ generalizza ulteriormente il quadro, permettendo di trattare non solo l'omologia di un singolo complesso filtrato ma la coomologia di un intero fascio F_ε che varia con il parametro ε in modo funtoriale. Questa generalizzazione, dovuta principalmente ai lavori di Kashiwara-Schapira, Curry e Ghrist, colloca la teoria della persistenza saldamente all'interno del formalismo dei Capitoli 1-6: un fascio di persistenza è precisamente un fascio sulla retta reale con la topologia di Alexandrov (dove gli aperti sono i raggi semi-infiniti $(-\infty, \varepsilon)$), e i suoi gruppi di coomologia H^i codificano esattamente i diagrammi di persistenza classici, unificando così TDA e teoria classica dei fasci in un unico linguaggio.

7.3 Interleavin Distance e Stabilità

Un concetto cruciale in omologia persistente è la **interleaving distance**, che misura la "distanza" tra due moduli persistenti (ossia diagrammi di spazi vettoriali indicizzati da $\mathbb{R}_+$ con morfismi di inclusione). Due moduli persistenti M e N sono δ-interleaved se esistono morfismi:

$\varphi_t: M_t \to N_{t+\delta}, \psi_t: N_t \to M_{t+\delta}$

per ogni $t \geq 0$, tali che $\psi_{t+\delta} \circ \varphi_t = (\text{inclusione})\{M_t \to M_{t+2\delta}\}$ e $\varphi_{t+\delta} \circ \psi_t = (\text{inclusione})\{N_t \to N_{t+2\delta}\}$.

L'interleaving distance è definita come:

$d_I(M, N) = \inf\{\delta \mid M \text{ e } N \text{ sono } \delta\text{-interleaved}\}$

Un risultato fondamentale della teoria è il **teorema di stabilità**: l'interleaving distance tra i moduli persistenti di omologia di due spazi filtrati è limitata dalla distanza di Gromov-Hausdorff (o altre distanze naturali) tra gli spazi.

Nella persistent sheaf cohomology, possiamo definire analogamente una interleaving distance tra fasci filtrati, e dimostrare risultati di stabilità che assicurano che piccole perturbazioni nei dati cartografici producono solo piccole variazioni nella struttura coomologica persistente.

La distanza di interleaving d_I tra due moduli di persistenza M, N è definita come l'estremo inferiore di $\delta \geq 0$ tale che esistano morfismi $\varphi: M \to N[\delta]$ e $\psi: N \to M[\delta]$ (dove $[\delta]$ denota lo shift del parametro di ε per δ) i cui composti approssimano l'identità a meno di un ulteriore shift 2δ. Il **teorema di stabilità dell'algebra di persistenza**, che afferma che d_I tra i moduli di persistenza di due funzioni f, g è maggiorato dalla distanza sup $\|f-g\|_\infty$, è il risultato che rende la teoria applicabile a dati reali affetti da rumore di misurazione: piccole perturbazioni del dato cartografico originale (dovute a errori strumentali GPS, discretizzazione, o campionamento non uniforme) producono variazioni proporzionalmente piccole nel diagramma di persistenza risultante, garantendo che le caratteristiche topologiche estratte siano un riflesso genuino della geografia sottostante e non un artefatto del rumore.

7.4 Costruzione di Fasci Persistenti da Dati Cartografici

Nel contesto cartografico, i fasci persistenti possono essere costruiti in vari modi. Supponiamo di avere un insieme di dati cartografici $D = \{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$, dove $x_i \in M$ sono posizioni sulla superficie terrestre e $v_i \in \mathbb{R}$ sono valori di una grandezza misurata (altitudine, temperatura, densità di popolazione, etc.).

Per ogni parametro di scala $\varepsilon > 0$, possiamo costruire un fascio F_ε su M nel modo seguente. Per ogni aperto $U \subseteq M$, definiamo:

$$F_\varepsilon(U) = \{f: U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è "}\varepsilon\text{-compatibile" con i dati in } U\}$$

dove una funzione f è detta ε-compatibile se per ogni punto di dato $x_i \in U$ con valore v_i, si ha $|f(x_i) - v_i| \leq \varepsilon$. I morfismi di restrizione sono dati dalle restrizioni ordinarie di funzioni.

Al variare di ε da 0 a $+\infty$, otteniamo una filtrazione di fasci:

$$F_0 \subseteq F_{\varepsilon_1} \subseteq F_{\varepsilon_2} \subseteq \ldots \subseteq F_{+\infty}$$

dove F_0 consiste delle funzioni che interpolano esattamente i dati (se esistono), e $F_{+\infty}$ è il fascio di tutte le funzioni continue.

La coomologia di questa filtrazione:

$$H^k(M, F_0) \to H^k(M, F_{\varepsilon_1}) \to H^k(M, F_{\varepsilon_2}) \to \ldots$$

fornisce informazioni sulla "persistenza" delle strutture topologiche nei dati cartografici al variare della tolleranza di approssimazione.

In pratica, dato un insieme finito di punti $P = \{p_1,\ldots,p_N\} \subset \mathbb{R}^2$ rappresentanti ad esempio le posizioni di stazioni di rilevamento sismico o pluviometrico, si costruisce il complesso di Čech $\check{C}_\varepsilon(P)$ unendo palle di raggio $\varepsilon/2$ centrate in ciascun p_i, e si definisce il fascio di persistenza $F(\varepsilon) = H_i(\check{C}_\varepsilon(P))$ con mappe di transizione indotte dall'inclusione $\check{C}_\varepsilon(P) \hookrightarrow \check{C}_{\varepsilon'}(P)$ per $\varepsilon \leq \varepsilon'$. Il teorema del nervo

garantisce che Č_ε(P) sia omotopicamente equivalente all'unione delle palle stesse, permettendo di interpretare direttamente le classi H_1(ε) come "buchi" nella copertura del territorio da parte della rete di stazioni al raggio di rilevamento ε — informazione direttamente utilizzabile per pianificare l'infrastruttura ottimale di sensori, individuando le regioni sotto-coperte che generano componenti di H_1 persistenti su un ampio intervallo di ε.

7.5 Barcode e Diagrammi di Persistenza

La struttura di un modulo persistente può essere codificata mediante il suo **barcode** o **diagramma di persistenza**. Per moduli persistenti su $\mathbb{R}_+$ che soddisfano certe ipotesi di finitezza, vale il teorema di struttura:

Teorema (Decomposizione di Gabriel-Zisman): Ogni modulo persistente su $\mathbb{R}_+$ di tipo finito si decompoone in somma diretta di moduli intervallo:

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} k[b_i, d_i)$$

dove $k[b_i, d_i)$ denota il modulo che vale k per $t \in [b_i, d_i)$ e 0 altrove.

Gli intervalli $[b_i, d_i)$ rappresentano le "barre" del barcode: ciascuna barra corrisponde a una feature topologica che "nasce" al parametro b_i e "muore" al parametro d_i. La lunghezza della barra, $d_i - b_i$, misura la "persistenza" della feature.

Nel diagramma di persistenza, equivalente ma diversamente visualizzato, ogni barra $[b_i, d_i)$ è rappresentata da un punto (b_i, d_i) nel piano. I punti lontani dalla diagonale $y = x$ rappresentano features altamente persistenti, mentre quelli vicini alla diagonale rappresentano rumore.

Il **teorema di decomposizione** per moduli di persistenza puntualmente finito-dimensionali, dovuto a Crawley-Boevey nella sua forma più generale, garantisce che ogni tale modulo si decomponga in modo unico come somma diretta di moduli a intervallo (interval modules), ciascuno rappresentato graficamente da una barra [nascita, morte) nel barcode. La lunghezza di una barra è interpretata come misura di "persistenza" — dunque, presuntivamente, di significatività geometrica — della corrispondente caratteristica topologica, mentre barre corte sono tipicamente attribuite a rumore; questa euristica, per quanto ampiamente utilizzata nella pratica della TDA cartografica, richiede cautela: non esiste una soglia universale di persistenza al di sopra della quale una caratteristica sia geometricamente significativa, e la scelta della soglia deve tener conto della scala caratteristica del fenomeno geografico studiato.

7.6 Applicazione: Analisi Multi-Scala di Dati Topografici

Consideriamo un dataset di elevazioni topografiche su una regione geografica R. Per ogni scala ε, possiamo costruire il fascio F_ε delle funzioni che approssimano i dati entro tolleranza ε. La coomologia di grado 0, $H^0(R, F_\varepsilon)$, conta il numero di componenti connesse dello spazio delle approssimazioni.

Al crescere di ε, diverse componenti connesse possono fondersi: questo corrisponde al fatto che approssimazioni che erano incompatibili per tolleranze piccole diventano compatibili per tolleranze maggiori. Il barcode di H^0 rivela quindi la struttura multi-scala delle ambiguità nell'interpolazione dei dati.

La coomologia di grado 1, $H^1(R, F_\varepsilon)$, cattura informazioni su "cicli" o "ostacoli" alla estendibilità globale. Ad esempio, se i dati topografici contengono misurazioni contraddittorie attorno a una regione

chiusa (un possibile errore di misurazione o una singolarità geologica), questo si manifesta come un elemento non banale in H^1.

Un'applicazione paradigmatica è l'estrazione di bacini idrografici da un modello digitale di elevazione (DEM) tramite l'analisi persistente della funzione altitudine h: M → ℝ. Filtrando i sottolivelli M_t = h^{-1}((-∞,t]) al crescere di t, le componenti di H_0(M_t) nascono nei minimi locali di h (i fondovalle) e muoiono per fusione con componenti di altitudine inferiore quando t supera l'altitudine di un colle (saddle point) che le separa; il diagramma di persistenza risultante fornisce una gerarchia naturale e matematicamente rigorosa dei bacini idrografici, ordinata per "profondità" di ciascun bacino (la persistenza della corrispondente barra), sostituendo euristiche ad hoc di soglia sull'accumulo di flusso tradizionalmente impiegate nei software GIS con un criterio topologicamente invariante e stabile rispetto al rumore del DEM.

7.7 Persistent Sheaf Cohomology su Spazi Stratificati

Una generalizzazione importante è la persistent sheaf cohomology su spazi stratificati. Supponiamo di avere uno spazio X con una stratificazione $S = \{S_\alpha\}_{a \in A}$, *e una famiglia di fasci costruibili* $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ rispetto alla stratificazione, con morfismi $F_s \to F_t$ per $s \leq t$.

La coomologia persistente:

$H^k(X, F_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$

può essere calcolata "strato per strato" mediante la sequenza spettrale di Leray associata alla stratificazione. Questo permette di decomporre la persistenza globale in contributi provenienti dai diversi strati, rivelando come le features topologiche sono distribuite attraverso le singolarità dello spazio.

In cartografia, questo è rilevante quando si analizzano dati su regioni con confini o discontinuità (coste, montagne, confini politici). La stratificazione naturale cattura questi elementi singolari, e la persistent sheaf cohomology stratificata rivela come la struttura topologica dei dati si comporta in prossimità di tali discontinuità.

Quando il dominio sottostante non è $\mathbb{R}^n$ bensì uno spazio stratificato X (una rete stradale con nodi, un confine amministrativo frastagliato), la teoria della persistenza si combina naturalmente con la teoria dei fasci costruibili del Capitolo 4: si considera un fascio F costruibile rispetto a una filtrazione crescente di sottospazi stratificati $X_\varepsilon \subseteq X$, e i gruppi $H^i(X_\varepsilon, F)$ formano un modulo di persistenza nel senso ordinario. Questo approccio permette di studiare, ad esempio, l'evoluzione della connettività di una rete di trasporto al crescere progressivo di una soglia di capacità o di traffico, dove ogni arco della rete è esso stesso una sottovarietà stratificata (con eventuali nodi di diramazione come strati di dimensione inferiore), unificando in un unico calcolo l'aspetto combinatorio della rete e l'aspetto continuo della soglia di filtrazione.

7.8 Algoritmi di Calcolo e Complessità

Il calcolo della coomologia persistente di fasci è computazionalmente più complesso del calcolo della omologia persistente classica. Mentre per l'omologia persistente di complessi simpliciali esistono algoritmi efficienti basati sulla riduzione di matrici di bordo (complessità $O(n^3)$ nel caso peggiore, dove n è il numero di simplessi), per la coomologia di fasci è necessario discretizzare lo spazio e approssimare i fasci mediante rappresentazioni finite.

Un approccio è il seguente:

1. **Discretizzazione**: Sostituire lo spazio continuo X con un complesso simpliciale K che lo approssima (ad esempio, una triangolazione)

2. **Restrizione dei fasci**: Restringere i fasci F_t a complessi cellulari F_t^{cell} sui simplessi di K

3. **Calcolo della coomologia cellulare**: Calcolare H^k(K, F_t^{cell}) mediante il complesso di cocatene cellulari

4. **Assemblaggio della persistenza**: Tracciare le transizioni nei gruppi di coomologia al variare di t

La complessità dipende crucialmente dalla discretizzazione scelta e dalla struttura dei fasci. Per fasci localmente costanti (sistemi locali), la complessità è comparabile a quella dell'omologia persistente ordinaria. Per fasci più generali, possono essere necessarie tecniche di approssimazione e algoritmi iterativi.

Il calcolo effettivo dei diagrammi di persistenza si basa sull'**algoritmo di riduzione di matrice** (matrix reduction algorithm), che riduce il complesso di bordo del complesso simpliciale filtrato a una forma a scala tramite operazioni di colonna, in tempo O(N^3) nel caso peggiore rispetto al numero N di simplessi, sebbene varianti pratiche (twist algorithm, clearing) riducano sensibilmente il costo medio sfruttando la struttura sparsa tipica dei complessi geometrici. Per grandi dataset cartografici, dell'ordine di milioni di punti di rilevamento, si ricorre tipicamente a complessi di Vietoris-Rips o di Delaunay-Čech, più economici da costruire rispetto al complesso di Čech pieno, in combinazione con tecniche di sparsificazione (witness complexes, landmark selection) che approssimano il diagramma di persistenza esatto entro un errore controllato dal teorema di stabilità della Sezione 7.3.

7.9 Software e Implementazioni: Stato dell'Arte

Diverse librerie open source implementano oggi in modo efficiente gli algoritmi discussi in questo capitolo, tra cui GUDHI (sviluppata da INRIA, con supporto per complessi di Čech, Vietoris-Rips e cubici, particolarmente adatta a dati raster provenienti da DEM), Ripser (specializzata nel calcolo rapido della sola omologia persistente tramite l'algoritmo clearing sopra menzionato), e Dionysus (che supporta in modo nativo i moduli di persistenza a più parametri, rilevanti quando si vuole filtrare simultaneamente rispetto a più grandezze cartografiche indipendenti, ad esempio altitudine e distanza dalla costa). L'integrazione di questi strumenti nei sistemi GIS tradizionali resta tuttavia parziale: la maggior parte dei software cartografici commerciali offre solo funzionalità euristiche di estrazione di bacini o di reti, senza esporre all'utente i diagrammi di persistenza sottostanti né le garanzie di stabilità teorica che ne motivano l'affidabilità.

8. Applicazioni Integrate e Sviluppi Futuri

8.1 Sintesi: Un Framework Unificato per la Cartografia Matematica

La teoria dei fasci e la coomologia forniscono un framework matematico unificato per affrontare i problemi fondamentali della cartografia:

Rappresentazione locale e incollamento globale: Il fascio C^∞_M delle funzioni differenziabili formalizza rigorosamente come le carte locali si incollano in una struttura globale coerente. La proprietà di fascio garantisce l'unicità e l'esistenza di estensioni globali compatibili con dati locali.

Ostruzioni topologiche: La coomologia di Čech e la coomologia di de Rham rivelano le ostruzioni topologiche a definizioni globali di coordinate, orientazioni, e altre strutture geometriche. Il calcolo esplicito di gruppi di coomologia fornisce criteri quantitativi per l'esistenza di soluzioni a problemi cartografici.

Singolarità e stratificazioni: La teoria dei fasci perversi e dei D-moduli permette di trattare rigorosamente le singolarità inevitabili nelle proiezioni cartografiche. La dualità di Verdier mette in relazione proprietà duali delle singolarità nel dominio e nell'immagine.

Ragionamento categoriale: La teoria dei topos fornisce un linguaggio logico interno per formulare e dimostrare teoremi su famiglie parametriche di carte cartografiche, e per trattare il ragionamento geometrico multi-scala.

Analisi di dati topologici: La persistent sheaf cohomology estende i metodi della topological data analysis al contesto dei fasci, permettendo di analizzare la struttura multi-scala e la robustezza di dati cartografici mediante invarianti topologici persistenti.

Ripercorrendo l'intero arco del trattato, emerge una gerarchia naturale di strumenti coomologici, ciascuno progettato per rispondere a un tipo specifico di domanda cartografica: la coomologia di Čech (Capitolo 2) risponde alla domanda "i dati locali si incollano globalmente?"; la teoria dei fasci fini e la dualità di de Rham (Capitolo 3) rispondono a "come integrare e conservare grandezze fisiche coerentemente sull'atlante?"; i fasci perversi e i D-moduli (Capitolo 4) rispondono a "come trattare rigorosamente le singolarità inevitabili di ogni proiezione globale?"; la teoria dei topos (Capitolo 5) risponde a "qual è il fondamento logico-categoriale che unifica tutti questi casi?"; la dualità di Verdier (Capitolo 6) fornisce il principio di simmetria che dimezza il lavoro dimostrativo; la coomologia persistente (Capitolo 7), infine, risponde alla domanda pratica "quali di queste strutture sono stabili rispetto al rumore di misurazione reale?". Questa architettura concettuale, più che ciascun singolo risultato tecnico, costituisce il contributo metodologico principale del presente trattato.

8.2 Proiezioni Cartografiche Ottimali: Un Approccio Variazionale

Un problema classico in cartografia è la costruzione di **proiezioni ottimali** che minimizzano una certa funzione di distorsione. Dal punto di vista della teoria dei fasci, questo può essere formulato come un problema variazionale su spazi di morfismi tra fasci.

Sia M la superficie terrestre (modellata come una varietà riemanniana con metrica g_M) e sia P un piano o altra superficie target (con metrica g_P). Una proiezione cartografica è un morfismo $\varphi: M \to P$. La distorsione di φ può essere misurata mediante il pull-back $\varphi^* g_P$ della metrica target, confrontato con la metrica originale g_M.

Una misura naturale di distorsione è l'integrale:

$$E[\varphi] = \int_M ||\varphi^* g_P - g_M||^2 \, dV_M$$

dove $||\cdot||$ è una norma opportuna sullo spazio dei tensori metrici. Il problema variazionale è:

$\min_{\varphi: M \to P} E[\varphi]$

soggetto a eventuali vincoli (ad esempio, φ deve essere un diffeomorfismo al di fuori di un insieme finito di punti).

Dal punto di vista dei fasci, i tensori metrici g_M e g_P sono sezioni dei fasci $\mathrm{Sym}^2(TM)$ e $\mathrm{Sym}^2(TP)$ rispettivamente. Il pull-back φ^* è un morfismo di fasci:

$\varphi^*: \mathrm{Sym}^2(TP) \to \varphi^{-1}\mathrm{Sym}^2(TP)$

e la condizione di minimo per $E[\varphi]$ si traduce in equazioni di Eulero-Lagrange che coinvolgono le derivate covarianti e le curvature delle metriche.

Il problema di determinare la proiezione che minimizza una funzionale di distorsione data (ad esempio l'integrale su M della deviazione locale dall'isometria, pesata secondo criteri di importanza geografica) può essere formulato come problema variazionale vincolato, la cui equazione di Eulero-Lagrange associata è generalmente un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare per la funzione di proiezione. La teoria dei fasci interviene in questo contesto fornendo il linguaggio naturale per formulare correttamente le **condizioni al contorno** del problema variazionale quando il dominio M presenta singolarità o è esso stesso definito tramite un atlante multi-carta: il fascio delle soluzioni locali dell'equazione di Eulero-Lagrange, unitamente alle condizioni di compatibilità alla Čech discusse nel Capitolo 2, determina lo spazio delle proiezioni globalmente ammissibili, spesso assai più ristretto dello spazio delle soluzioni puramente locali.

8.3 Fasci di Soluzioni di Equazioni Differenziali

Molti problemi in cartografia e geodesia coinvolgono la risoluzione di equazioni differenziali parziali. Ad esempio:

- **Equazione del geoide**: La forma del geoide (superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre) è soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni al bordo appropriate.

- **Equazione di diffusione**: La propagazione di fenomeni atmosferici o oceanografici è governata da equazioni di diffusione-advection.

- **Equazioni di geodetiche**: Le curve di distanza minima sulla superficie terrestre sono geodetiche della metrica riemanniana.

Ciascuna di queste equazioni definisce un fascio di soluzioni su M. Ad esempio, il fascio Sol_Δ delle soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ è un sottofascio del fascio C^∞_M. La teoria dei D-moduli fornisce il framework naturale per studiare tali fasci di soluzioni, le loro singolarità, e le loro proprietà di estendibilità.

Un risultato fondamentale è che il fascio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare a coefficienti analitici reali è un D_M-modulo olonomo, e quindi ha dimensione finita su campi di funzioni razionali. Questo implica che le soluzioni sono determinate univocamente da un numero finito di condizioni iniziali o al bordo.

Più in generale, per un'equazione differenziale lineare Lu = 0 su una varietà cartografica M, il fascio Sol_L delle soluzioni locali (Sol_L(U) = {u ∈ C^∞(U) : Lu|_U = 0}) è tipicamente localmente costante di rango finito (pari alla dimensione dello spazio delle soluzioni locali, determinato dall'ordine e dal tipo dell'operatore L) sulle componenti dove i coefficienti di L sono regolari, e sviluppa una monodromia non banale attorno a eventuali singolarità di L, esattamente come discusso per il caso del logaritmo complesso nella Sezione 4.6. Questo fatto lega direttamente la teoria dei D-moduli (Capitolo 4) alla modellazione differenziale sviluppata nel trattato companion *Onde e flussi*: ogni equazione di diffusione o di avvezione impiegata per modellare fenomeni migratori o climatici su un atlante cartografico dà luogo, per lo stesso principio, a un fascio di soluzioni la cui coomologia H^1 misura precisamente l'ostruzione a estendere una soluzione locale a un'intera regione geografica connessa ma topologicamente non semplicemente connessa.

8.4 Teoria dell'Informazione Geometrica e Fasci di Canali

Una direzione emergente è l'applicazione della teoria dei fasci alla **teoria dell'informazione geometrica**. In questo contesto, si considerano fasci di "canali di comunicazione" o "canali di trasferimento di informazione" su uno spazio.

Ad esempio, in una rete di sensori distribuiti geograficamente, ogni punto x ∈ M corrisponde a un sensore, e il germe del fascio in x rappresenta l'informazione locale disponibile al sensore. I morfismi di restrizione rappresentano la perdita di informazione quando ci si allontana da x.

La coomologia di tale fascio misura le ostruzioni globali alla ricostruzione dell'informazione: un gruppo H^1 non banale indica la presenza di "ambiguità circolari" dove informazioni locali consistenti non possono essere integrate in un quadro globale coerente.

La persistent sheaf cohomology in questo contesto studia come la struttura informativa cambia al variare della banda di comunicazione, della potenza del segnale, o di altri parametri della rete.

Un filone di ricerca più recente, sviluppato in particolare da Robert Ghrist e collaboratori sotto il nome di "sheaf-theoretic sensor fusion", modella una rete di sensori eterogenei (che misurano grandezze diverse, a risoluzioni diverse, in punti diversi del territorio) come un fascio sulla rete stessa vista come spazio topologico combinatorio (un complesso cellulare), dove le sezioni compatibili corrispondono precisamente a stati globali del sistema consistenti con tutte le misurazioni locali. La coomologia H^1 di questo fascio misura quantitativamente l'inconsistenza dei dati raccolti — un valore non nullo segnala che nessuno stato globale è simultaneamente compatibile con tutte le misurazioni, situazione tipica in presenza di sensori malfunzionanti o di errori sistematici di calibrazione, offrendo così un criterio diagnostico rigoroso, alternativo alle tecniche puramente statistiche di rilevamento delle anomalie, per la validazione di reti di monitoraggio cartografico su larga scala.

8.5 Applicazioni alla Cartografia Digitale e GIS

I sistemi di informazione geografica (GIS) moderni gestiscono enormi quantità di dati spaziali multi-strato: topografia, uso del suolo, infrastrutture, dati demografici, etc. La teoria dei fasci fornisce un framework matematico naturale per formalizzare la struttura di tali sistemi.

Ogni "layer" in un GIS può essere modellato come un fascio su uno spazio base (la regione geografica). Le operazioni GIS fondamentali (overlay, buffer, intersect, union) corrispondono a operazioni categoriali su fasci:

- **Overlay**: Prodotto tensoriale di fasci $F \otimes G$
- **Intersect**: Pull-back lungo morfismi diagonali
- **Union**: Somma diretta o push-out di fasci
- **Buffer**: Estensione per zero o immagine diretta lungo inclusioni

La coomologia di fasci su GIS multi-strato rivela le incompatibilità e le ostruzioni all'integrazione dei diversi layer. Ad esempio, se due layer contengono informazioni contraddittorie su una regione, questo si manifesta come un elemento non banale nei gruppi di coomologia relativi.

I moderni sistemi GIS vettoriali già implementano, spesso implicitamente e senza esplicitarne il fondamento teorico, strutture dati che sono precisamente fasci: il formato **topologico** di dato vettoriale (in cui archi, nodi e facce condividono geometria e attributi in modo consistente lungo i confini condivisi, a differenza del formato "spaghetti" privo di topologia esplicita) impone di fatto una condizione di incollamento nel senso della Sezione 1.4. L'adozione esplicita del linguaggio dei fasci nella progettazione di database geografici offrirebbe il vantaggio di rendere verificabile algoritmicamente, tramite il calcolo dei gruppi H^1 discussi nel Capitolo 2, la consistenza topologica dell'intero dataset in fase di importazione, anziché affidarsi esclusivamente a euristiche di validazione geometrica locale (auto-intersezioni, gap, overlap) come avviene tipicamente negli strumenti odierni.

8.6 Quantum Sheaves e Cartografia Non-Commutativa

Una direzione speculativa ma matematicamente interessante è l'estensione della teoria dei fasci al contesto non-commutativo e quantistico. La **geometria non-commutativa** di Connes fornisce un framework per fare geometria differenziale su "spazi" che sono descritti da algebre non-commutative piuttosto che da varietà classiche.

I **fasci quantistici** o **fasci su algebre non-commutative** sono oggetti matematici che generalizzano i fasci ordinari sostituendo gli anelli commutativi di funzioni con algebre non-commutative. La teoria di tali fasci è ancora in fase di sviluppo, ma ha applicazioni potenziali in fisica teorica (geometria dello spaziotempo quantistico) e in teoria dell'informazione quantistica.

In cartografia, questo potrebbe portare a nuovi paradigmi di rappresentazione dove le "coordinate" non commutano, riflettendo un'incertezza intrinseca nella localizzazione (simile al principio di indeterminazione di Heisenberg in meccanica quantistica). Sebbene altamente speculativo, questo approccio potrebbe essere rilevante per la modellizzazione di dati spaziali con alta incertezza o per la cartografia di sistemi complessi dove le nozioni classiche di "posizione" e "confine" sono sfumate.

La geometria non commutativa, nell'impostazione di Connes, sostituisce lo spazio topologico X con un'algebra (eventualmente non commutativa) di "funzioni" su X, e i fasci vengono rimpiazzati da moduli su tale algebra; questo formalismo, per quanto speculativo rispetto agli scopi immediati della cartografia, trova una motivazione applicativa nel trattamento di dati cartografici a risoluzione fondamentalmente limitata (ad esempio dati quantizzati su una griglia di pixel di dimensione minima non ulteriormente raffinabile), dove le coordinate x, y non commutano più esattamente nel limite di risoluzione finita, in analogia formale con il principio di indeterminazione. Sebbene applicazioni cartografiche concrete di questo formalismo restino allo stadio esplorativo, l'analogia con la quantizzazione dello spazio delle fasi suggerisce una possibile via per trattare rigorosamente gli effetti di discretizzazione e di aliasing nei dati raster ad altissima risoluzione.

8.7 Machine Learning Geometrico e Fasci Neurali

Una direzione di ricerca attuale è l'integrazione di metodi di machine learning con strutture geometriche e topologiche. Le **reti neurali geometriche** operano su dati che hanno una struttura di varietà o di complesso simpliciale, piuttosto che su spazi euclidei.

I **fasci neurali** sono un'estensione concettuale dove i neuroni sono organizzati non come layer completamente connessi, ma come sezioni di fasci su uno spazio base. L'architettura della rete riflette la topologia dello spazio sottostante, e le operazioni di convoluzione e pooling sono definite rispetto alla struttura di fascio.

In cartografia, questo potrebbe permettere di costruire modelli di machine learning che rispettano automaticamente le invarianti geometriche e topologiche della superficie terrestre, producendo predizioni più accurate e interpretabili per compiti come:

- Classificazione di uso del suolo
- Predizione di fenomeni meteorologici
- Interpolazione di dati sparsi
- Rilevamento di anomalie topografiche

La persistent sheaf cohomology potrebbe essere utilizzata come layer di feature extraction in tali reti, fornendo rappresentazioni topologicamente informate dei dati di input.

I **fasci neurali** (sheaf neural networks), introdotti da Hansen e Ghrist, generalizzano le reti neurali su grafo sostituendo il singolo spazio delle feature condiviso da tutti i nodi con un fascio cellulare sul grafo, in cui ogni nodo e ogni arco hanno il proprio spazio vettoriale di feature, collegati da mappe di restrizione apprendibili. Applicato a una rete cartografica (ad esempio una rete stradale o una rete di sensori ambientali), questo approccio permette al modello di apprendere automaticamente, dai dati stessi, il grado di compatibilità o "disaccordo" tra nodi vicini — quantificato precisamente dal laplaciano del fascio, la cui immagine e il cui nucleo generalizzano rispettivamente le classi coomologiche di ostruzione discusse nel Capitolo 2 — offrendo un meccanismo di attenzione geometricamente motivato, potenzialmente più robusto delle architetture standard di reti neurali su grafo quando i dati presentano eterogeneità strutturale significativa tra regioni diverse del territorio.

8.8 Fasci Dinamici e Cartografia Temporale

Molte applicazioni cartografiche moderne richiedono la gestione di dati che variano nel tempo: evoluzione del clima, crescita urbana, dinamica delle popolazioni, etc. La teoria dei **fasci dinamici** o **fasci parametrizzati dal tempo** fornisce il framework per trattare rigorosamente tali situazioni.

Un fascio dinamico è essenzialmente un fascio F su $M \times [0, T]$, dove M è lo spazio geografico e $[0, T]$ è l'intervallo temporale. Le sezioni $F(U \times [t_1, t_2])$ rappresentano "campi spazio-temporali" sulla regione U durante l'intervallo $[t_1, t_2]$.

La coomologia di fasci dinamici può rivelare:

- **Invarianti topologici nel tempo**: Features che persistono per tutto l'intervallo temporale
- **Bifurcazioni**: Momenti in cui la struttura topologica cambia qualitativamente
- **Cicli e periodicità**: Fenomeni che si ripetono con regolarità

La persistent sheaf cohomology bidimensionale (con un parametro di scala spaziale e uno temporale) fornisce una "mappa di persistenza" che visualizza come le features topologiche nascono, evolvono, e scompaiono sia nello spazio che nel tempo.

L'estensione della teoria a fasci il cui valore F(U) dipende esplicitamente anche da un parametro temporale t, con mappe di transizione temporale F(U,t) → F(U,t') che commutano con le restrizioni spaziali, fornisce il quadro naturale per la **cartografia dinamica**: mappe che rappresentano fenomeni in evoluzione (traffico, migrazione di popolazioni animali, avanzamento di un fronte di incendio) piuttosto che stati statici. La coerenza spazio-temporale dei dati — la condizione che l'evoluzione osservata su carte sovrapposte sia mutuamente compatibile non solo istante per istante ma anche nella dinamica delle transizioni — è codificata dalla coomologia di un fascio sul prodotto $M \times \mathbb{R}_t$, e le tecniche di persistenza del Capitolo 7 si estendono naturalmente a questo caso bi-parametrico (spazio e tempo), un'area di ricerca ancora largamente aperta al momento della stesura di questo trattato.

8.9 Considerazioni Epistemologiche: Limiti dell'Approccio Categoriale

È doveroso, in chiusura del corpo tecnico del trattato, richiamare i limiti intrinseci dell'approccio qui sviluppato. La formalizzazione categoriale, per quanto potente nel chiarire la struttura logica dei problemi di incollamento e di ostruzione, non fornisce di per sé alcuna soluzione ai problemi propriamente **metrici** della cartografia — la scelta di quale distorsione minimizzare, quale compromesso accettare tra conformità e equiarealità, resta un problema di natura in parte estetica, in parte funzionale all'uso previsto della carta, che nessun teorema di esistenza o di dualità può dirimere. Il valore del formalismo dei fasci risiede piuttosto nella sua capacità di rendere esplicite e quantificabili le ostruzioni che altrimenti resterebbero implicite nella pratica cartografica tradizionale, trasformando intuizioni qualitative ("questa proiezione ha un problema ai poli") in invarianti calcolabili con precisione — un guadagno metodologico che, come si è cercato di mostrare capitolo dopo capitolo, non è meramente estetico ma ha conseguenze computazionali e applicative dirette.

Conclusioni

La teoria dei fasci e la coomologia costituiscono uno dei framework matematici più potenti e generali per lo studio sistematico delle strutture geometriche, topologiche e algebriche che emergono in cartografia. Attraverso la formalizzazione rigorosa di concetti quali le carte locali, gli incollamenti, le ostruzioni globali e le singolarità, la teoria dei fasci non solo fornisce un linguaggio preciso per formulare problemi cartografici classici, ma apre anche nuove direzioni di ricerca che integrano metodi della geometria algebrica, della topologia differenziale, della teoria delle categorie e della topological data analysis.

L'approccio categoriale e funtoriale alla base della teoria dei fasci permette di trattare in modo unificato problemi che a prima vista sembrano disparati: dalla definizione globale di sistemi di coordinate sulla sfera, al calcolo di distorsioni in proiezioni cartografiche, all'analisi multi-scala di dati topografici, fino alla modellizzazione di reti di sensori distribuiti e sistemi di informazione geografica.

I fasci soft e fine, attraverso le loro proprietà di aciclicità, garantiscono l'assenza di ostruzioni coomologiche e permettono di utilizzare partizioni dell'unità per costruzioni globali a partire da dati locali. Il teorema di de Rham stabilisce un ponte profondo tra la geometria differenziale (forme differenziali) e la topologia algebrica (coomologia singolare), fornendo metodi computazionali efficaci per il calcolo di invarianti topologici.

La teoria dei fasci perversi e dei D-moduli estende questi strumenti al caso di spazi con singolarità, permettendo di studiare rigorosamente il comportamento delle equazioni differenziali e delle trasformazioni geometriche in presenza di punti singolari. La dualità di Verdier e la dualità di Poincaré-Lefschetz rivelano simmetrie profonde che legano proprietà locali e globali, interne e di frontiera, dirette e duali.

La teoria dei topos generalizza ulteriormente la nozione di fascio, permettendo di fare geometria e logica in contesti astratti dove non c'è uno spazio topologico sottostante nel senso classico, ma solo una nozione categoriale di "ricoprimento locale". La logica interna dei topos fornisce un linguaggio per il ragionamento geometrico su famiglie parametriche e per la formalizzazione di concetti di verità variabile e dipendente dal contesto.

Infine, la persistent sheaf cohomology apre la strada all'applicazione di metodi topologici all'analisi di dati cartografici reali, fornendo invarianti robusti rispetto al rumore e permettendo l'identificazione di features significative a diverse scale. L'integrazione di questi metodi con algoritmi computazionali, machine learning, e sistemi di informazione geografica costituisce una frontiera promettente della ricerca in cartografia matematica.

In sintesi, la teoria dei fasci non è semplicemente uno strumento tecnico per risolvere problemi cartografici specifici, ma rappresenta un cambio di paradigma nel modo in cui concepiamo la struttura matematica dello spazio geografico e delle sue rappresentazioni. Attraverso il linguaggio universale delle categorie, dei funtori e delle trasformazioni naturali, la teoria dei fasci unifica concetti provenienti da diverse aree della matematica e fornisce un framework concettuale che continua a stimolare nuove ricerche e applicazioni.

Il percorso qui tracciato — dai fasci elementari di funzioni differenziabili fino alla coomologia persistente e ai fasci neurali — testimonia la sorprendente unità concettuale che la teoria dei fasci è in grado di imporre su un campo apparentemente eterogeneo di problemi cartografici. Restano tuttavia aperte numerose direzioni di ricerca: l'estensione sistematica della persistenza multi-parametro a dati cartografici genuinamente multi-modali (Sezione 8.8), l'integrazione pratica degli strumenti di validazione topologica nei database GIS di produzione (Sezione 8.5), e l'esplorazione più rigorosa delle analogie non commutative accennate nella Sezione 8.6. Si auspica che il presente trattato possa costituire un punto di riferimento tecnico per chi intenda approfondire, con il rigore proprio della geometria algebrica e della topologia algebrica contemporanee, un campo — la cartografia matematica — troppo spesso relegato, nella letteratura, a un ruolo puramente strumentale e privato della profondità teorica che in realtà possiede.

Riferimenti Bibliografici

I riferimenti seguenti sono organizzati per capitolo, secondo un criterio di rilevanza tematica diretta; alcuni testi, per la loro natura trasversale, sono citati in più capitoli.

Capitolo 1 — Fasci di Funzioni Differenziabili su Atlanti

Godement, R. (1958). *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris.
Warner, F. W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag.
Tennison, B. R. (1975). *Sheaf Theory*. Cambridge University Press.

Capitolo 2 — Coomologia di Čech per Ricoprimenti Aperti

Bott, R. e Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag.
Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Capitolo III.
Sobel, D. (1995). *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*. Walker & Company.

Capitolo 3 — Fasci Soft e Fine: Proprietà di Aciclicità

Bredon, G. E. (1997). *Sheaf Theory*, 2ª ed. Springer-Verlag.
Wells, R. O. (2008). *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 3ª ed. Springer-Verlag.
de Rham, G. (1955). *Variétés différentiables: formes, courants, formes harmoniques*. Hermann, Paris.

Capitolo 4 — Fasci Perversi e D-Moduli per Singolarità

Kashiwara, M. e Schapira, P. (1990). *Sheaves on Manifolds*. Springer-Verlag.
Hotta, R., Takeuchi, K. e Tanisaki, T. (2008). *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Birkhäuser.
Beilinson, A. A., Bernstein, J. e Deligne, P. (1982). *Faisceaux pervers*, Astérisque 100. Société Mathématique de France.

Capitolo 5 — Teoria dei Topos Applicata

Mac Lane, S. e Moerdijk, I. (1994). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.
Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press.
Lawvere, F. W. e Rosebrugh, R. (2003). *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press.

Capitolo 6 — Dualità di Verdier e Poincaré-Lefschetz

Kashiwara, M. e Schapira, P. (1994). *Sheaves on Manifolds*, cap. III (nuova edizione con integrazioni sulla dualità). Springer-Verlag.
Iversen, B. (1986). *Cohomology of Sheaves*. Springer-Verlag.
Borel, A. et al. (1984). *Intersection Cohomology*. Birkhäuser.

Capitolo 7 — Persistent Sheaf Cohomology

Edelsbrunner, H. e Harer, J. (2010). *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society.
Curry, J. (2014). *Sheaves, Cosheaves and Applications*. Tesi di dottorato, University of Pennsylvania.
Ghrist, R. (2014). *Elementary Applied Topology*. Createspace.
Carlsson, G. e de Silva, V. (2010). "Zigzag Persistence." *Foundations of Computational Mathematics*, 10(4).

Capitolo 8 — Applicazioni Integrate e Sviluppi Futuri

Hansen, J. e Ghrist, R. (2019). "Toward a Spectral Theory of Cellular Sheaves." *Journal of Applied and Computational Topology*, 3(4).
Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
Snyder, J. P. (1993). *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*. University of Chicago Press.
Robinson, A. H., Morrison, J. L., Muehrcke, P. C., Kimerling, A. J. e Guptill, S. C. (1995). *Elements of Cartography*, 6ª ed. Wiley.